

Teoría de grupos y autómatas celulares

Sebastián Barbieri

DMCC, Universidad de Santiago de Chile.

Un autómata celular en \mathbb{Z}^2 es una transformación $\tau: A^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^2}$ donde A es un conjunto finito y para todo $v \in \mathbb{Z}^2$, el valor de $\tau(x)(v)$ está determinado por una regla local que depende únicamente de los valores de x en una vecindad finita en torno a v . Si bien la descripción de un autómata celular es sencilla, da a lugar a dinámicas complejas, tales como el juego de la vida de Conway (link) o la hormiga de Langton ((link))

De manera más general, un autómata celular se puede definir sobre un grupo contable G mediante una función local de manera análoga a \mathbb{Z}^2 . Esta clase de sistemas puede caracterizarse como los endomorfismos continuos de la acción natural *shift* $G \curvearrowright A^G$ dada por

$$(g \cdot x)(h) = x(g^{-1}h) \text{ para } g, h \in G, x \in A^G.$$

El objetivo de este curso es estudiar aspectos de la teoría de grupos bajo la óptica de la dinámica de sus autómatas celulares. Estudiaremos conceptos clásicos como promediabilidad, crecimiento (intermedio), grupos residualmente finitos, grupos Hopfianos, anillos de grupos, etc.

El curso también será ocasión para presentar varias conjeturas que son actualmente objeto de investigación, tales como la conjetura de surjectividad, las conjeturas zero-divisor y stable-finiteness de Kaplanski, etc.

El curso se basará casi completamente en el libro de Ceccherini-Silberstein y Coornaert [1], aunque también ocasionalmente utilizaremos partes de [3] y [4]. También utilizaremos [2] como fuente de ejercicios y problemas para exposiciones.

La evaluación del curso se realizará mediante tareas y una exposición.

Referencias

- [1] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*. Springer, 2010.
- [2] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert. *Exercises in Cellular Automata and Groups*. Springer, 2023.
- [3] D. Kerr and H. Li. *Ergodic Theory*. Springer International Publishing, 2016.
- [4] C. Löh. *Geometric Group Theory*. Springer International Publishing, 2017.