

Programa de seminario de postgrado

Nombre: Aspectos matemáticos de los métodos de Galerkin discontinuos

Profesor: Patrick Vega, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Programas: Magíster en Ciencia en la especialidad de Matemática, Doctorado en Ciencia con mención en Matemática.

Requisitos: Análisis funcional, Ecuaciones diferenciales parciales, Aproximación por elementos finitos de ecuaciones diferenciales parciales.

Motivación del curso: Los problemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de primer orden y por ecuaciones con difusión aparecen en numerosos modelos matemáticos y aplicaciones científicas. Su simulación numérica requiere, en particular, una discretización espacial adecuada. Los métodos de Galerkin discontinuos constituyen una familia de técnicas de discretización variacional cuyo diseño y análisis presentan desafíos matemáticos específicos. Este curso, que se basará casi completamente en [1] y [3], se dedica principalmente a los aspectos matemáticos de los métodos de Galerkin discontinuos.

Contenidos:

1. Conceptos básicos
 - 1.1 Existencia, unicidad y estabilidad en problemas lineales modelo
 - 1.2 Marco discreto
 - 1.3 Análisis de error abstracto para métodos no conformes
 - 1.4 Sucesiones admisibles de mallas
2. La ecuación de advección-reacción
 - 2.1 Advección-reacción estacionaria
 - 2.2 Advección-reacción no estacionaria
3. EDPs con difusión
 - 3.1 Difusión pura: marco continuo
 - 3.2 Método de penalización interior simétrica
 - 3.3 Levantamientos (*liftings*) y gradientes discretos
 - 3.4 Métodos de Galerkin discontinuos mixtos
 - 3.5 Difusión heterogénea
 - 3.6 Difusión-advección-reacción
 - 3.7 Un ejemplo no estacionario: la ecuación del calor
4. Temas adicionales sobre difusión pura
 - 4.1 Análisis funcional discreto
 - 4.2 Convergencia a soluciones de regularidad mínima



- 4.3 Variantes de simetría y penalización
- 4.4 Método de Galerkin centrado en elementos
- 4.5 Postproceso local
- 4.6 Estimaciones de error *a posteriori*
- 5. Flujos incompresibles
 - 5.1 Flujos de Stokes estacionarios
 - 5.2 Flujos de Navier-Stokes estacionarios
 - 5.3 El caso no estacionario
- 6. Sistemas de Friedrichs
 - 6.1 Ingredientes básicos y ejemplos
 - 6.2 Marco continuo
 - 6.3 Discretización
 - 6.4 Sistemas de dos campos
 - 6.5 El caso no estacionario
- 7. El método de Galerkin discontinuo hibridizable (HDG)
 - 7.1 Análisis del error de métodos mixtos mediante proyecciones
 - 7.2 Formulación del método HDG
 - 7.3 Métodos HDG para ecuaciones evolutivas

Bibliografía: Básica: [1], [3]; complementaria: [2], [4], [5], [6], [7].

Referencias

- [1] D. A. DI PIETRO AND A. ERN, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, vol. 69 of *Mathématiques & Applications*, Springer, Heidelberg, 2012.
- [2] V. DOLEJŠÍ AND M. FEISTAUER, *Discontinuous Galerkin method. Analysis and applications to compressible flow*, vol. 48 of *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer, Cham, 2015.
- [3] S. DU AND F.-J. SAYAS, *An invitation to the theory of the hybridizable discontinuous Galerkin method. Projections, estimates, tools*, *SpringerBriefs in Mathematics*, Springer, Cham, 2019.
- [4] A. ERN AND J.-L. GUERMOND, *Finite elements I—Approximation and interpolation*, vol. 72 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer, Cham, 2021.
- [5] —, *Finite elements II—Galerkin approximation, elliptic and mixed PDEs*, vol. 73 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer, Cham, 2021.
- [6] —, *Finite elements III—First-order and time-dependent PDEs*, vol. 74 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer, Cham, 2021.
- [7] B. RIVIÈRE, *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations. Theory and implementation*, vol. 35 of *Frontiers in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2008.

