

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE
CHILE

Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de
la Computación



Ondas gravitacionales en la aproximación lineal de la relatividad general

Matías Martínez

Profesor guía:
Dr. Enrique Reyes

Tesis para optar al
grado de
Magíster en Ciencia
en la Especialidad de
Matemática

Santiago, Chile
2025

A mi abuelo Lucho.

Agradecimientos

Quiero empezar estas palabras agradeciéndole a mi madre, por su amor y cariño, por su preocupación en mi educación, por apoyarme en cada decisión, a pesar de no estar de acuerdo en todas ellas, por contagiarme con la maravillosa pasión por saber, por ser madre y padre a la vez, por todo esto y más, gracias mamá.

En segundo lugar, quiero agradecer a mi profesor guía, Enrique Reyes, por haberme aceptado como tesista a pesar de no conocerme. Por su paciencia, al momento de enseñarme Geometría y Relatividad, y por su dedicación y consejos que me ha brindado a lo largo de este proceso. Muchas gracias profesor.

Quiero agradecer a mi familia, a mi tata, mis tíos, mis primos, mi abuela nena y mi weli, quienes siempre me han brindado apoyo en todo sentido y sobre todo para seguir con mis estudios. Son una parte fundamental en mi vida.

El inicio del magister fue más difícil de lo que imaginaba antes de entrar, hubo momentos en que quería tirar la toalla porque sentía que no era capaz de sacarlo adelante, sobre todo en el primer año. Seguramente habría desistido de seguir en el programa si no fuera por la Mabel, mi polola, quien estuvo en mis momentos más bajos y siempre estuvo ahí para darme ánimos y motivación para poder seguir adelante. Sin ti no habría sido posible este trabajo. Gracias por tu amor, cariño e infinita comprensión. Esta tesis también va dedicada a ti.

Quiero agradecer a mis amigos, de pedagogía, Alonso, Pedro, Gabriel y Javier, por su compañía, conversaciones y risas. Mis amigos que hice en el magister, sobre todo a Gerardo, que siempre me ayudó y ayuda a seguir aprendiendo matemática. Quiero también agradecer a los profesores del programa, quienes han colaborado en mi formación matemática. Agradezco al profesor Guillermo Palma, que me formó en el área de física en su curso de Cosmología. Por último, a Carolina, secretaria del programa, por sus gestiones, orientaciones y amabilidad.

Matías Martínez.

Resumen

Las ondas gravitacionales surgen como soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío cuando estas se estudian en la aproximación lineal alrededor de la métrica de Minkowski. En este régimen, la gravedad puede interpretarse como una pequeña perturbación del espacio-tiempo. El objetivo de esta tesis es presentar un estudio formal y autocontenido de las ondas gravitacionales, partiendo desde la linealización de la relatividad general y culminando con su aplicación a un sistema binario. Para ello, se desarrollan los preliminares geométricos necesarios, se estudia la libertad de gauge de la perturbación métrica, se analiza el efecto de las ondas gravitacionales sobre partículas de prueba y se obtiene la fórmula cuadrupolar para la radiación emitida por una fuente compacta. Finalmente, aplicamos los resultados obtenidos a un sistema binario.

Palabras clave: [ondas gravitacionales, relatividad general, gauge, campo débil]

Abstract

Gravitational waves arise as solutions to the vacuum Einstein equations when studied in the linear approximation around the Minkowski metric. In this regime, gravity can be interpreted as a small perturbation of spacetime. The objective of this thesis is to present a formal and self-contained study of gravitational waves, starting from the linearization of general relativity and culminating in its application to a binary system. For this, we develop the necessary geometric preliminaries, we study the gauge freedom of the metric perturbation, the effect of the gravitational wave on test particles and we derive the quadrupole formula for the radiation emitted by a compact source. Finally, we apply these results to a binary system.

Keywords: [gravitational waves, general relativity, gauge, weak field]

Tabla de contenido

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Geometría Diferencial	3
1.1.1. Variedades Diferenciales	3
1.1.2. Tensores	6
1.1.3. Diferenciación	10
1.1.4. Curvatura	17
1.2. Relatividad General	20
1.2.1. Espacio-tiempo	20
1.2.2. Geodésicas	22
1.2.3. Ecuaciones de Campo	24
2. Linealización de la Relatividad General	26
3. Transformaciones de Gauge	30
3.1. Gauge de Lorentz	31
3.2. Gauge TT	36
4. Medición de una Onda Gravitacional	40
5. Generación de Ondas Gravitacionales	46
5.1. Cuadrupolo	50

5.2. Energía de una onda gravitacional	53
6. Aplicación a un Sistema Binario	59
6.1. Radiación gravitacional en sistemas binarios	59
6.2. Consecuencias Físicas	62
6.3. Detección de Ondas Gravitacionales	66
6.3.1. Detección Indirecta	66
6.3.2. Detección Directa	67
6.3.3. Aplicación Púlsar Binario PSR B1913+16	69
Perspectivas de estudio futuro	71
Referencias	74
Apéndice	75

Índice de figuras

1.1. La figura muestra el cono de luz $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 = 0$ sobre el plano (ct, x, y) <i>Fuente:</i> [Lam10].	21
4.1. Polarización $+$ ($ A_+ \neq 0, A_\times = 0$).	44
4.2. Polarización $\times$ ($ A_\times \neq 0, A_+ = 0$).	45
5.1. Aproximación zona lejana	46
6.1. Gráfico $\dot{T}(t)$ v/s t	64
6.2. Señal $h(t)$	65
6.3. <i>Fuente:</i> [A ⁺ 16].	66
6.4. <i>Fuente:</i> [TW82].	67
6.5. <i>Fuente:</i> [WT04].	67
6.6. Modelo interferómetro de Michelson.	68

Índice de Tablas

6.1. Parámetros del sistema binario PSR B1913+16. Extraídos de [WT04] y [DWNC18]	70
---	----

Introducción

En 1915, Albert Einstein publicó las ecuaciones de campo de la relatividad general,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Ellas proporcionan una nueva teoría de la gravedad, dejando atrás la concepción de la gravedad como una fuerza y entendiéndola como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Estas ecuaciones son altamente no lineales y en consecuencia encontrar una solución analítica de ellas, para Einstein, parecía una tarea imposible.

La no linealidad de las ecuaciones de Einstein se hace explícita al escribir el tensor de Ricci en coordenadas:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda},$$

donde

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

En particular, además de términos con segundas derivadas de la métrica, aparecen términos cuadráticos en los símbolos de Christoffel (por ende, cuadráticos en primeras derivadas de la métrica). Además, también está presente la inversa $g^{\mu\nu}$ en los símbolos de Christoffel, cuya dependencia respecto de $g_{\mu\nu}$ no es lineal. Por esto, la ecuación de campo constituye un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$.

Esto condujo a Einstein, un año más tarde, a linealizar sus ecuaciones de campo. Encontró que las ecuaciones linealizadas daban lugar a soluciones tipo onda; estas ondas eran transversales que viajaban a la velocidad de la luz. En su deducción, se entendía que la amplitud de estas ondas serían extremadamente pequeñas y requerirían de un evento de muy altas energías para que pudieran manifestarse. La imposibilidad de la época para detectar tales ondas debido a su baja intensidad y a la manera en que Einstein dedujo su existencia produjo que la comunidad científica fuera escéptica de ellas.

El objetivo central de esta tesis es presentar un estudio formal y autocontenido de las ondas gravitacionales, partiendo desde la linealización de la relatividad general, hasta llegar a aplicar los resultados obtenidos a un sistema binario.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presentan los elementos de geometría diferencial y relatividad general necesarios. En el Capítulo 2 se introduce la aproximación de campo débil y se linealizan las ecuaciones de Einstein alrededor de la métrica de Minkowski. En el Capítulo 3 se estudia la libertad de gauge, se impone el gauge de Lorentz y se discute la obtención del gauge TT, identificando los grados de libertad físicos de la onda. En el Capítulo 4 se analiza el efecto de una onda gravitacional sobre partículas de prueba mediante desviación geodésica, estableciendo el puente entre la teoría y la señal medida en un interferómetro. En el Capítulo 5 se aborda la generación de radiación gravitacional, se construye la solución retardada en la zona lejana y se obtiene la dependencia cuadrupolar del campo radiativo, además de discutir el flujo de energía asociado. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan aplicaciones a sistemas binarios.

Capítulo 1

Preliminares

La relatividad general no describe la gravitación como una fuerza en el sentido clásico, sino como una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Esta reinterpretación obliga a reemplazar el lenguaje habitual del cálculo en $\mathbb{R}^n$ por un formalismo más general, capaz de dar sentido a derivadas, longitudes, trayectorias y curvatura en variedades diferenciables. En este contexto, los preliminares que siguen tienen por objeto introducir las herramientas matemáticas necesarias para formular esta teoría y para el posterior estudio de las ondas gravitacionales.

1.1. Geometría Diferencial

Las definiciones usadas en esta sección fueron obtenidas de [DC92], [Lee13] y [Wal84].

1.1.1. Variedades Diferenciales

Definición 1.1 (Variedad diferenciable). Un espacio topológico M es una variedad diferenciable de dimensión n si es Hausdorff, segundo contable y existe una familia de parejas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, llamadas cartas, donde $U_\alpha \subset M$ es abierto, $\cup_\alpha U_\alpha = M$ y

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

es un homeomorfismo, tal que la aplicación de cambio de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son difeomorfismos.

Ejemplo 1.1. Veamos la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ como una variedad diferenciable vía

proyección estereográfica. Sea

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

la esfera unitaria de dimensión 2. Consideremos los puntos $N = (0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$, polo norte y polo sur de la esfera, respectivamente. Definimos los abiertos $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus N$ y $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus S$. La proyección estereográfica desde el polo norte es el mapa

$$\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Geométricamente, $\varphi_N(p)$ es el punto donde la recta que une N con $p \in U_N$ corta al plano $\{z = 0\} \cong \mathbb{R}^2$. Es claro que φ_N es continua en su dominio, ahora vemos que φ_N es un homeomorfismo calculando su inversa explícitamente. Sea $u = (u_1, u_2) = \varphi_N(x, y, z)$. Así, vemos que $x = u_1(1-z)$ y $y = u_2(1-z)$, reemplazando x e y en la ecuación de la esfera unitaria y resolviendo para z , obtenemos que

$$z = \frac{\|u\|^2 - 1}{1 + \|u\|^2}.$$

Usando las relaciones para x e y , nos queda que la inversa de φ_N es

$$\varphi_N^{-1} = \left(\frac{2u_1}{1 + \|u\|^2}, \frac{2u_2}{1 + \|u\|^2}, \frac{\|u\|^2 - 1}{1 + \|u\|^2} \right)$$

Así, φ_N es un homeomorfismo. Sin embargo, la carta $(\varphi_N, \mathbb{S}^2 \setminus N)$ no cubre toda la variedad, pues queda fuera el polo norte. Usando el mismo procedimiento anterior, vemos que

$$\varphi_S: U_S \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

$$\varphi_S^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow U_S, \quad (u_1, u_2) \mapsto \left(\frac{2u_1}{1 + \|u\|^2}, \frac{2u_2}{1 + \|u\|^2}, \frac{1 - \|u\|^2}{1 + \|u\|^2} \right)$$

Así, el par de cartas (U_N, φ_N) y (U_S, φ_S) cubren $\mathbb{S}^2$ y la aplicación cambio de coordenadas

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}: \varphi_N(U_N \cap U_S) \longrightarrow \varphi_S(U_N \cap U_S),$$

es un difeomorfismo. Por lo tanto, $\mathbb{S}^2$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

Usando el mismo procedimiento anterior con las aplicaciones

$$\varphi_N: \mathbb{S}^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right).$$

$$\varphi_S: \mathbb{S}^n \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

podemos concluir que $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n .

Definición 1.2 (Espacio tangente). Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Para una carta centrada en p , con coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$, se define el espacio tangente de M en p como el espacio vectorial $T_p M$ de derivaciones en p de la forma

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

En particular,

$$T_p M = \text{span} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}.$$

Definición 1.3 (Fibrado tangente). Sea M una variedad diferenciable. El fibrado tangente TM se define como

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Definición 1.4 (Campo vectorial). Sea M una variedad diferenciable. Un campo vectorial en M es una función suave

$$X: M \rightarrow TM, \quad p \mapsto (p, X(p)) \in \{p\} \times T_p M$$

que verifica $\pi \circ X = \text{id}_M$, donde $\pi: TM \rightarrow M$ es la proyección natural.

Definición 1.5 (Flujo de un campo vectorial). Sea X un campo vectorial suave. Un flujo local de X es una familia de difeomorfismos

$$\psi_t: M \rightarrow M, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

tal que $\psi_0 = \text{id}_M$ y, para todo $p \in M$, la curva $\gamma_p(t) = \psi_t(p)$ satisface

$$\frac{d}{dt} \psi_t(p) = X_{\psi_t(p)}.$$

Además, si $t + s \in I$ se satisface $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$.

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad del flujo). Sea M una variedad suave y sea X un campo vectorial suave completo. Entonces existe una única familia de difeomorfismos

$$\psi_t: M \rightarrow M, \quad t \in \mathbb{R},$$

tal que

$$\psi_0 = \text{id}_M, \quad \psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s,$$

y para todo $p \in M$, la curva $\gamma_p(t) = \psi_t(p)$ es la única curva integral de X que pasa por p , es decir,

$$\gamma_p(0) = p, \quad \frac{d}{dt} \psi_t(p) = X_{\psi_t(p)}.$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en el capítulo 9 de [Lee13].

Definición 1.6 (Espacio y fibrado cotangente). Sea M una variedad diferenciable. El espacio cotangente T_p^*M en $p \in M$ es el espacio dual

$$T_p^*M = \{ \lambda: T_pM \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \text{ es lineal} \}.$$

El fibrado cotangente T^*M se define como

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M.$$

1.1.2. Tensores

Definición 1.7 (Tensor sobre un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un tensor T de tipo (r, s) sobre V es una aplicación

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R},$$

lineal en cada componente.

Definición 1.8 (Tensor en una variedad). Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un tensor de tipo (r, s) en p es una aplicación

$$T_p: \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{s \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

lineal en cada componente.

Observación. A los tensores de tipo $(0, s)$ se denominan tensores **s-covariantes** y los tensores de tipo $(r, 0)$ se denominan tensores **r-contravariantes**. Por convención, los índices de los tensores covariantes se denotarán como sub-índices y los de los tensores contravariantes serán super-índices.

Definición 1.9 (Producto tensorial). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Si $S \in T^{r,s}(V)$ y $T \in T^{r',s'}(V)$, se define el **producto tensorial** $S \otimes T \in T^{r+r',s+s'}(V)$ por

$$(S \otimes T)(\omega^1, \dots, \omega^{r+r'}, v_1, \dots, v_{s+s'}) := S(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) \cdot T(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}, v_{s+1}, \dots, v_{s+s'}),$$

para todo $\omega^1, \dots, \omega^{r+r'} \in V^*$ y todo $v_1, \dots, v_{s+s'} \in V$.

Un tensor s -covariante es de la forma

$$T_p: T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Las componentes de este tensor son

$$T_{i_1 \dots i_s}(p) = T_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \Big|_p \right)$$

Notemos que si tenemos un tensor $\alpha: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, $\alpha \in T_p^* M$, así mismo $T_p \in (T_p^* M)^{\otimes s}$, donde $(T_p^* M)^{\otimes s} = T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M$ y $\otimes$ es el producto tensorial. De esta forma, viendo el tensor (1.2) como elemento del producto tensorial $(T_p^* M)^{\otimes s}$, podemos escribirlo usando las bases del espacio $T_p^* M$, $\{dx^j\}_p$.

$$T_p = T_{j_1 \dots j_s}(p) dx^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}|_p$$

De manera análoga, un tensor r -contravariante es de la forma

$$T_p: T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Las componentes de este tensor son

$$T^{i_1 \dots i_r}(p) = T_p \left(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_r}|_p \right).$$

Ahora, si consideramos una aplicación $v: T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $v \in (T_p^* M)^* \cong T_p M$. De manera análoga, el tensor (1.3) puede verse como un elemento del producto tensorial $(T_p M)^{\otimes r}$. De esta forma, podemos escribirlo usando la base de $T_p M$, $\{\partial/\partial x^j|_p\}$, como

$$T_p = T^{j_1 \dots j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \Big|_p.$$

Ejemplo 1.2. Sea M una variedad diferenciable. Para cada $p \in M$ consideremos un tensor 2-covariante

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Fijado un sistema de coordenadas (x^i) sobre un abierto $U \subset M$, las componentes de g_p en estas coordenadas se definen como

$$g_{ij}(p) := g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right), \quad p \in U.$$

Viendo g_p como elemento del producto tensorial $T_p^* M \otimes T_p^* M$, podemos escribir

$$g_p = g_{ij}(p) dx^i|_p \otimes dx^j|_p.$$

Supongamos además que, para todo $p \in U$, la matriz $[g_{ij}(p)]$ es invertible. Denotamos por $[g^{ij}(p)]$ su matriz inversa. Entonces el tensor

$$g_p^{-1} = g^{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \in T_p M \otimes T_p M$$

es un tensor de tipo $(2, 0)$ asociado a g_p , que puede interpretarse como el tensor contravariante inverso de g_p .

Tomemos un ejemplo en concreto, consideremos $M = \mathbb{R}^2$ con coordenadas globales $(x^1, x^2) = (x, y)$. Definimos un tensor $(0, 2)$ en cada punto p mediante la aplicación bilineal

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_p(v, w) = v^1 w^1 + 4 v^2 w^2,$$

En forma matricial,

$$g_p(v, w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}.$$

Así, $g_{ij}(p) = \text{diag}(1, 4)$. Viendo g_p como elemento del producto tensorial $(T_p^* M)^{\otimes 2}$ y usando la base dual $\{dx^1|_p, dx^2|_p\}$ de $T_p^* M$, podemos escribir

$$g_p = g_{ij}(p) dx^i|_p \otimes dx^j|_p = dx^1|_p \otimes dx^1|_p + 4 dx^2|_p \otimes dx^2|_p.$$

Es claro ver que la matriz es invertible y que su inversa es inversa viene dada por $g^{ij}(p) = \text{diag}(1, 1/4)$. Así, el tensor $(2, 0)$ inverso de g_p se escribe entonces como

$$g_p^{-1} = g^{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}|_p = \frac{\partial}{\partial x^1}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^2}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^2}|_p.$$

El tensor mostrado en el ejemplo 1.2, se conoce como tensor métrico y es la piedra angular de la relatividad general. Más adelante definiremos el tensor métrico con más cuidado.

Por último, si consideramos el tensor (1.1), entonces

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p) = T_p \left(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_r}|_p, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}|_p \right),$$

y como elemento del producto tensorial, vemos que $T_p \in (T_p M)^{\otimes r} \otimes (T_p^* M)^{\otimes s}$. Con respecto a las bases anteriores, T_p se escribe entonces como

$$T_p = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}|_p,$$

Definición 1.10 (Fibrado tensorial). Sea M una variedad diferenciable. Para cada $p \in M$ denotamos por $T_p^{r,s} M$ el espacio de tensores de tipo (r, s) en p . El fibrado tensorial de tipo (r, s) sobre M se define como

$$T^{r,s} M = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^{r,s} M.$$

Definición 1.11 (Campo tensorial). Sea M una variedad diferenciable. Un campo tensorial de tipo (r, s) en M es una función suave

$$T: M \longrightarrow T^{r,s}M, \quad p \mapsto (p, T_p) \in \{p\} \times T_p^{r,s}M$$

que verifica $\pi^{r,s} \circ T = \text{id}_M$, donde $\pi^{r,s}: T^{r,s}M \rightarrow M$ es la proyección natural.

Una de las propiedades fundamentales de los tensores es la transformación tensorial que discutiremos a continuación. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Consideremos dos sistemas de coordenadas alrededor de p , $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tilde{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con

$$x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)), \quad \tilde{x}(p) = (\tilde{x}^1(p), \dots, \tilde{x}^n(p)).$$

Los vectores en p se escriben como combinación lineal de la base $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ o de $\{\partial/\partial \tilde{x}^\alpha|_p\}$. Así mismo, para una 1-forma en p consideramos la base $\{dx^i|_p\}$ o la base $\{d\tilde{x}^\alpha|_p\}$, dependiendo del sistema de coordenadas.

La relación entre las bases viene dada por la matriz jacobiana del cambio de coordenadas (ver [Lee13], pg 64):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} \Big|_p = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^\alpha}(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad d\tilde{x}^\alpha \Big|_p = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i}(p) dx^i \Big|_p.$$

Consideremos un tensor T_p de tipo (r, s) en p , es decir,

$$T_p \in T_p^{r,s}(M) = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r \text{ veces}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s \text{ veces}}.$$

En las coordenadas (x^i) escribimos

$$T_p = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \otimes dx^{j_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \Big|_p,$$

mientras que en las coordenadas $(\tilde{x}^\alpha)$ lo escribimos como

$$T_p = \tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\alpha_r}} \Big|_p \otimes d\tilde{x}^{\beta_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{\beta_s} \Big|_p.$$

Usando las relaciones anteriores entre las bases, se obtiene la **ley de transformación tensorial**:

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \tilde{x}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial \tilde{x}^{\beta_s}} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.3. Consideremos la métrica, vista en el ejemplo 1.2, ahora como campo tensorial g de tipo $(0, 2)$. Podemos escribir,

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Consideremos un cambio de coordenadas $(x^i) \rightarrow (\tilde{x}^\alpha)$. Entonces, usando la relación (1.4), obtenemos que

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{ij}$$

Desde el punto de vista geométrico, la ley de transformación tensorial muestra que aunque las componentes de un tensor dependan del sistema de coordenadas, esta dependencia está sujeta al jacobiano del cambio de coordenadas. Esto nos indica que una ecuación tensorial es válida en cualquier sistema de coordenadas. Decimos que esto es una ecuación covariante.

En relatividad general, se usa una métrica en particular, la métrica lorentziana. A continuación daremos una definición amplia del tensor métrico.

Definición 1.12. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Una **métrica pseudo-riemanniana** en M es un campo tensorial suave

$$g: TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que, para cada $p \in M$, g_p es bilineal, simétrico y no degenerado (si $g_p(v, w) = 0$ para todo w , entonces $v = 0$).

Observación. Para cada $p \in M$, la representación matricial de cada tensor simétrico no degenerado $(0, 2)$ puede transformarse, bajo un cambio de base, en una cuya diagonal cuyas entradas son iguales a ± 1 [Lee13]. Por convención diremos que los números p y q indican la cantidad de negativos y positivos en la diagonal, respectivamente. Los números p y q son independientes de la base escogida [FIS03]. Al par (p, q) le llamaremos **signatura de g** . Si no hay condiciones sobre la signatura de la métrica, entonces decimos que el par (M, g) es una **variedad pseudo-Riemanniana**. Cuando la signatura es $(n, 0)$, entonces hablamos de una **variedad Riemanniana**, por último, si la signatura es $(1, n - 1)$ entonces hablamos de **variedad lorentziana**.

1.1.3. Diferenciación

Supongamos que queremos derivar un vector V^μ , que como vimos en la sección anterior, se puede identificar como un tensor de tipo $(1, 0)$, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿La derivada respeta la ley de transformación tensorial? En otras palabras, ¿si derivo un tensor, sujeto a un cambio de coordenadas, obtengo de vuelta un tensor? De ser así, uno esperaría que bajo una transformación de coordenadas $(x^i) \rightarrow (\tilde{x}^i)$, se tuviera que

$$\frac{\partial \tilde{V}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta},$$

respetando la ley de transformación tensorial (1.4), sin embargo, esto es **falso**. En efecto, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{V}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} &= \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \right) V^\alpha \right] \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) V^\alpha\end{aligned}\quad (1.5)$$

El segundo término de la igualdad anterior hace que la derivada usual no respete la ley de transformación tensorial. Esto motiva a considerar otros tipos de formas de diferenciación que permite escribir ecuaciones de forma covariante. Esto es lo que veremos en esta sección.

Definición 1.13 (Derivada de Lie). Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo vectorial con flujo ψ_ε . La **derivada de Lie** de un campo tensorial T de tipo (r, s) a lo largo de X se define por

$$(\mathcal{L}_X T)_p := \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (\psi_\varepsilon^* T)_p, \quad p \in M,$$

donde ψ_ε^* es el pullback inducido por el difeomorfismo ψ_ε .

Proposición 1.1. Para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ campos vectoriales se tiene

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie, definido por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M).$$

Proposición 1.2. Sea T un campo tensorial de tipo (r, s) en M . En coordenadas, la derivada de Lie de T a lo largo de X tiene componentes

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= X^\rho \partial_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &\quad - \sum_{k=1}^r T^{\mu_1 \dots \rho \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho X^{\mu_k} + \sum_{\ell=1}^s T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \rho \dots \nu_s} \partial_{\nu_\ell} X^\rho.\end{aligned}$$

En particular, si g es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, en coordenadas locales se obtiene

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = X^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu X^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu X^\rho.$$

Definición 1.14 (Conexión afín). Una **conexión afín** ∇ en una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y,$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$,

donde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$. En coordenadas, se escribe

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho},$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ son los símbolos de Christoffel.

Para facilitar la notación, escribiremos $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ y $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} = \nabla_{\partial_\mu} = \nabla_\mu$.

Proposición 1.3. Para un campo vectorial $V = V^\rho \partial_\rho$, se tiene que

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu.$$

Demostración. Escribimos $V = V^\nu \partial_\nu$ en la base de coordenadas. Usando la regla de Leibniz (propiedad 3. de la definición 1.14)

$$\nabla_\mu V = \nabla_\mu(V^\nu \partial_\nu) = V^\nu \nabla_\mu \partial_\nu + \partial_\mu(V^\nu) \partial_\nu.$$

Por definición de los símbolos de Christoffel, $\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho$, de modo que

$$\nabla_\mu V = V^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho + \partial_\mu(V^\nu) \partial_\rho = (\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu) \partial_\rho.$$

Tomando solo los coeficientes, obtenemos que

$$(\nabla_\mu V)^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu.$$

□

La proposición anterior describe la **derivada covariante** de un campo vectorial (tensor de tipo $(1, 0)$). Vamos a extender esta noción a tensores arbitrarios de tipo (r, s) .

Definición 1.15 (Derivada covariante). Sea ∇ una conexión afín en M y sea T un campo tensorial suave de tipo (r, s) sobre M . La **derivada covariante** de T respecto de ∇ es el campo tensorial ∇T de tipo $(r, s+1)$. En coordenadas, si T tiene componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$, definimos las componentes de ∇T por

$$\begin{aligned} (\nabla_\lambda T)^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &+ \sum_{i=1}^r \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu_i} T^{\mu_1 \dots \rho \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{j=1}^s \Gamma_{\lambda\nu_j}^\rho T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \rho \dots \nu_s}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4. Siguiendo la definición 1.15, podemos ver que aplicada a tensores 2-contravariante y 2-covariante, $T^{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$, respectivamente, da que

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\nu T^{\mu\alpha}$$

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha T_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha T_{\mu\alpha}$$

Teorema 1.2 (Conexión de Levi-Civita). En una variedad pseudo-riemanniana (M, g) existe una única conexión ∇ que, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, es

1. Libre de torsión (simétrica):

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

2. Compatible con la métrica:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Esta conexión se llama **conexión Levi-Civita**.

Proposición 1.4. En coordenadas (x^μ) , las condiciones del teorema 1.2, equivalen a

1. Libre de torsión:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$$

2. Compatible con la métrica:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ son los símbolos de Christoffel de ∇ .

Proposición 1.5. Los símbolos de Christoffel para la conexión Levi-Civita vienen dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.5. Sea $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con coordenadas polares (r, θ) . Consideremos el tensor métrico

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

Vemos que

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (1.6), obtenemos que

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (0 + 0 - \partial_r g_{\theta\theta}) = -r,$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + 0 - 0) = \frac{1}{r},$$

Recordemos que la conexión es libre de torsión, luego $\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta$, por lo tanto, los símbolos de Christoffel no nulos, son

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}.$$

Ejemplo 1.6. Consideremos el toro de revolución $T^2 \subset \mathbb{R}^3$. Fijemos $R > r > 0$. Consideremos la parametrización

$$X(\theta, \varphi) = ((R+r \cos \theta) \cos \varphi, (R+r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta), \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi.$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \theta} &= (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= (-(R+r \cos \theta) \sin \varphi, (R+r \cos \theta) \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tensor métrico queda

$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R+r \cos \theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi,$$

Vemos que

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R+r \cos \theta)^2 \end{pmatrix}, \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & (R+r \cos \theta)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Calculamos los símbolos de Christoffel, usando (1.6) y nos queda que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (0 + 0 - \partial_\theta g_{\varphi\varphi}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \frac{\sin \theta (R+r \cos \theta)}{r}, \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (\partial_\theta g_{\varphi\varphi} + 0 - 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(R+r \cos \theta)^2} \right) \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = -\frac{r \sin \theta}{R+r \cos \theta}, \end{aligned}$$

Por lo tanto, los símbolos no nulos, son

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = \frac{\sin \theta (R+r \cos \theta)}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = -\frac{r \sin \theta}{R+r \cos \theta}.$$

Observación. Los símbolos de Christoffel, no son tensores, puesto que no están definidos de manera covariante y en consecuencia no respetan la ley de transformación tensorial descrita en (1.4). En efecto, es fácil ver que bajo un cambio de coordenadas $(x^i) \rightarrow (\tilde{x}^i)$, se tiene que

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}. \quad (1.7)$$

Al comienzo de esta sección vimos que la derivada parcial no respeta la ley de transformación tensorial. Vamos a ver que la derivada covariante sí transforma como tensor. Veamos la transformación aplicada a un campo tensorial V de tipo $(1, 0)$. Por definición,

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{V}^\rho = \tilde{\partial}_\mu \tilde{V}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \tilde{V}^\nu.$$

donde $\tilde{\partial}_\mu = \partial/\partial\tilde{x}^\mu$. De las ecuaciones 1.5, 1.7 y notando que $\tilde{V}^\rho = \frac{\partial\tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} V^\lambda$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{V}^\rho &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \partial_\sigma V^\lambda + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} V^\lambda \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha V^\lambda + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \partial_\sigma V^\lambda + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha V^\lambda \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\lambda} \right)}_{(*)} V^\lambda \end{aligned}$$

Notemos que si el término $(*)$ es cero, entonces la derivada covariante respeta la transformación tensorial. Consideremos

$$\frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\rho.$$

Derivando respecto de $\tilde{x}^\mu$ y aplicando regla de la cadena, obtenemos

$$0 = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}.$$

Multiplicando por $\partial\tilde{x}^\nu/\partial x^\lambda$ se ve que

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\lambda} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{V}^\rho &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \partial_\sigma V^\lambda + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha V^\lambda \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \left(\partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda V^\kappa \right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \nabla_\sigma V^\lambda, \end{aligned}$$

que es precisamente la ley de transformación tensorial de un tensor de tipo $(1, 1)$. Análogamente, $\nabla\alpha$ transforma como tensor de tipo $(0, 2)$ para toda 1-forma α . Ahora, sea T un campo tensorial de tipo (r, s) . Luego, T puede escribirse como una suma finita de productos tensoriales de campos de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$, es decir,

$$T = \sum_{k=1}^n f_k X_1^{(k)} \otimes \cdots \otimes X_r^{(k)} \otimes \alpha_1^{(k)} \otimes \cdots \otimes \alpha_s^{(k)},$$

donde $f_k \in C^\infty(M)$, los $X_i^{(k)}$ son campos vectoriales y las $\alpha_j^{(k)}$ son 1-formas.

Por linealidad, basta estudiar

$$f X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s.$$

Como la derivada covariante satisface la regla de Leibniz para el producto tensorial, se obtiene

$$\begin{aligned} & \nabla(f X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \\ &= df \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \\ &+ f (\nabla X_1) \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \\ &+ \cdots \\ &+ f X_1 \otimes \cdots \otimes (\nabla X_r) \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \\ &+ f X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes (\nabla \alpha_1) \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \\ &+ \cdots \\ &+ f X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes (\nabla \alpha_s). \end{aligned}$$

Vemos que,

- df es un tensor de tipo $(0, 1)$;
- cada ∇X_i es un tensor de tipo $(1, 1)$;
- cada $\nabla \alpha_j$ es un tensor de tipo $(0, 2)$.

Por lo tanto, en cada término aparece exactamente un índice covariante adicional respecto de T , mientras que los índices contravariantes y covariantes restantes se conservan. En consecuencia, cada uno de los sumandos anteriores es un tensor de tipo $(r, s + 1)$.

Como la suma de tensores del mismo tipo vuelve a ser un tensor del mismo tipo, se concluye que la derivada covariante ∇T transforma como un tensor de tipo $(r, s + 1)$.

Proposición 1.6. Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana con conexión de Levi-Civita ∇ . Entonces, para todo campo vectorial X ,

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu.$$

Observación. La derivada de Lie y la derivada covariante son nociones distintas de variación de un campo tensorial. La derivada de Lie mide el cambio de un tensor a lo largo del flujo generado por un campo vectorial, mientras que la derivada covariante mide la variación de un tensor a lo largo de una dirección utilizando una conexión (Levi-Civita), lo que permite comparar objetos definidos

en espacios tangentes distintos. En relatividad general se utiliza principalmente la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita, ya que esta es compatible con la métrica. Esta es la noción de derivada que usaremos a lo largo de este trabajo, salvo en el capítulo 3 en que la derivada de Lie nos permitirá entender la noción de gauge.

1.1.4. Curvatura

A mediados del siglo XIX parte de la comunidad científica aún era escéptica respecto a la posibilidad de negar el quinto postulado de Euclides y que esto no llevara, eventualmente, a una contradicción. Bajo este paradigma, Riemann plantea que no se debe suponer que siempre el espacio sea euclideo [\[Spi99\]](#).

Riemann se pregunta qué impide que el elemento de línea

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

no pueda transformarse, mediante un cambio de coordenadas, en la forma euclidea

$$ds^2 = \delta_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j,$$

En un punto siempre es posible elegir coordenadas de modo que

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_p = 0$$

Por lo tanto, la primera información geométrica no trivial aparece en las segundas derivadas de g_{ij} . Si estas no pueden eliminarse simultáneamente en un entorno mediante un cambio de coordenadas, entonces la variedad no es localmente plana. Esta obstrucción intrínseca a reducir la métrica a su forma plana en un vecindario es precisamente lo que mide la curvatura. Históricamente, esta fue una de las motivaciones fundamentales de Riemann y conduce a la siguiente definición moderna de curvatura.

Definición 1.16. La curvatura R de una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es una correspondencia que a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ asigna una aplicación $R(X, Y): \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

donde ∇ es la conexión Levi-Civita de M .

Proposición 1.7. Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. En coordenadas, el tensor de curvatura R se escribe como

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\sigma = R^\rho_{\sigma\mu\nu} \partial_\rho,$$

donde

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.8)$$

Demostración. De la definición 1.16, aplicada a las bases de la ∂_μ , ∂_ν y ∂_σ , vemos que

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\sigma = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]}) \partial_\sigma$$

Como las derivadas parciales, conmutan, es directo ver que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Así,

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\sigma = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \partial_\sigma$$

Notemos que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\sigma = \nabla_\mu (\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\rho) = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \partial_\lambda$$

Renombramos el índice mudo λ par dejar la expresión en la base ∂_ρ y nos queda que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\sigma = (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\rho_{\mu\lambda}) \partial_\rho$$

Análogamente,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \partial_\sigma = (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\rho_{\nu\lambda}) \partial_\rho$$

Por lo tanto,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.$$

□

A partir de la definición 1.16, podemos definir el tensor de curvatura R , conocido como **tensor de Riemann**, como $R: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, donde $R = R^\rho_{\sigma\mu\nu} \partial_\rho \otimes dx^\sigma \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu$. Vemos que el tensor de Riemann es un tensor de tipo $(1, 3)$.

En principio, el tensor de Riemann (1.8) posee n^4 componentes. Sin embargo, posee diversas simetrías que reducen el tamaño de las componentes independientes. En la siguiente proposición veremos algunas de sus simetrías.

Proposición 1.8 (Simetrías del tensor de Riemann). El tensor de Riemann satisface las siguientes propiedades:

1. Antisimétrico en los dos últimos índices:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}.$$

2. Antisimétrico en los dos primeros índices:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}.$$

3. Simétrico por intercambio de pares:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Proposición 1.9 (Identidades de Bianchi). El tensor de curvatura de Riemann satisface:

1. **Primera identidad de Bianchi:**

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0.$$

2. **Segunda identidad de Bianchi:**

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\rho\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\rho\sigma\lambda\mu} = 0.$$

Definición 1.17. El **tensor de Ricci** se define como la contracción del tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (1.9)$$

mientras que el **escalar de Ricci** se define por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

A partir de la segunda identidad de Bianchi,

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\rho\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\rho\sigma\lambda\mu} = 0,$$

contraemos en los índices ρ y μ con $g^{\rho\mu}$. Como la conexión de Levi-Civita es compatible con la métrica, $\nabla g = 0$, la métrica conmuta con la derivada covariante. Así,

$$\nabla_\lambda (g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu}) + g^{\rho\mu} \nabla_\mu R_{\rho\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu (g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\lambda\mu}) = 0.$$

Usando la definición del tensor de Ricci, vemos que

$$\nabla_\lambda R_{\sigma\nu} + \nabla^\rho R_{\rho\sigma\nu\lambda} - \nabla_\nu R_{\sigma\lambda} = 0.$$

Ahora contraemos esta expresión en los índices σ y ν con $g^{\sigma\nu}$. Nuevamente, usando $\nabla g = 0$, obtenemos

$$\nabla_\lambda R - \nabla^\rho R_{\rho\lambda} - \nabla^\nu R_{\nu\lambda} = 0.$$

Como ρ y ν son índices mudos, esto se escribe como

$$\nabla_\lambda R - 2\nabla^\rho R_{\rho\lambda} = 0 \iff 2\nabla^\rho R_{\rho\lambda} - \nabla_\lambda R = 0.$$

Por lo tanto,

$$\nabla^\rho \left(R_{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\rho\lambda} R \right) = 0. \quad (1.11)$$

Esta ecuación es fundamental en la teoría de relatividad general y volveremos a ella en la siguiente sección.

1.2. Relatividad General

En esta sección discutiremos las definiciones básicas y conceptos relevantes de la teoría de relatividad general. Se usó principalmente [HE23].

En relatividad general, la métrica toma un rol fundamental. Por esta razón, la mayoría de las referencias no usan el producto tensorial para escribir la métrica, en lugar de eso, para facilitar la notación, se abrevia tomando $dx \otimes dx = dx^2$. Así mismo, se suele abreviar $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, escribiendo el elemento de línea ds^2 . Por lo tanto, un campo métrico cualquiera se puede escribir de forma compacta como $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Como se verá en esta sección, al trabajar en relatividad general, debemos considerar tanto el tiempo como el espacio, si trabajamos sobre una métrica que considera el tiempo entonces se usarán índices griegos, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ y si trabajamos solo de manera espacial, se usarán índices latinos, $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Estas serán la notaciones y convenciones usadas de ahora en adelante.

1.2.1. Espacio-tiempo

Definición 1.18 (Espacio-tiempo). Un **espacio-tiempo** es un par (M, g) donde M es una variedad diferenciable, conexa, de dimensión 4 y g es una **métrica lorentziana**, es decir, un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ no degenerado de signatura $(-+++)$.

Claramente necesitamos que la variedad sea de dimensión 4, pues consideramos tres componentes espaciales y una temporal. Por otra parte, también podemos también considerar un como métrica lorentziana un tensor que cumple con las condiciones expresadas, pero cuya signatura es $(+---)$. Sin embargo, a lo largo de este trabajo sólo usaremos la signatura vista en la definición, también llamada "mostly plus".

Ejemplo 1.7 (Espacio-tiempo de Minkowski). Consideremos la variedad $M = \mathbb{R}^4$ y $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Definimos la métrica lorentziana $g = \eta$ por

$$\eta = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

equivalentemente, en estas coordenadas,

$$[\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Entonces (M, η) es un espacio-tiempo: M es una variedad diferenciable conexa de dimensión 4 y η es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ no degenerado de signatura $(-+++)$.

La métrica lorentziana g permite clasificar las curvas según su carácter causal. Dada una curva suave $\gamma: I \rightarrow M$ con parametrización $x^\mu(\lambda)$ y vector tangente $\dot{\gamma} = \dot{x}^\mu(\lambda) \partial_\mu$, se dice que γ es:

- **tipo tiempo** si $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$ para todo λ ,
- **nula** (o tipo luz) si $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ para todo λ ,
- **tipo espacio** si $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) > 0$ para todo λ .

El intervalo infinitesimal ds^2 a lo largo de γ satisface

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x(\lambda)) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\lambda^2,$$

donde el signo de ds^2 (o, equivalentemente, de $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$) determina el carácter causal.

Geoméricamente, esta distinción entre los tipos de curvas queda clara usando el concepto de **cono de luz** (figura 1.1). Fijado un evento $P_1 \in M$, el cono de luz en el espacio tangente $T_{P_1}M$ está formado por todos los vectores nulos. Geométricamente, el cono de luz (como conjunto de puntos en M) que emana de P_1 consiste en los puntos que pueden conectarse con P_1 mediante una curva nula (es decir, una curva cuyo vector tangente es nulo en cada punto).

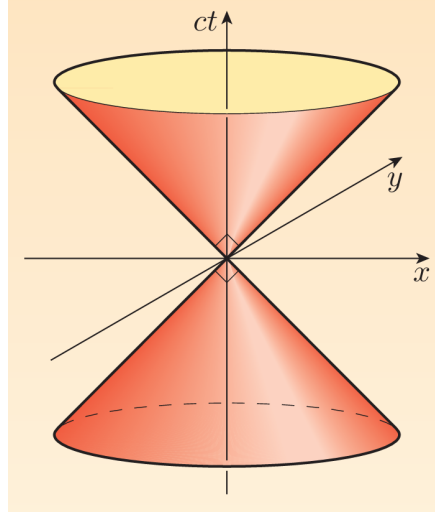


Fig. 1.1: La figura muestra el cono de luz $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 = 0$ sobre el plano (ct, x, y) Fuente: [Lam10].

En la definición 1.18 hablamos del par (o modelo) (M, g) . Sin embargo, este modelo no es único, pues podemos considerar un par (M', g') tal que existe un difeomorfismo $\varphi: M \rightarrow M'$ que lleve la métrica g a g' , esto es, $\varphi_* g = g'$. Así, el espacio-tiempo no es único sino una clase de equivalencia de todos los pares (M', g') que son equivalentes a (M, g) vía difeomorfismos [HE23].

1.2.2. Geodésicas

Sea $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva sobre una variedad diferenciable M . Consideremos un vector $v = v^\alpha \partial_\alpha$ sobre la curva. La derivada de este vector a lo largo de γ es $\nabla_{\dot{\gamma}} v$, donde $\dot{\gamma} = \dot{x}(t) \partial_\alpha$. En coordenadas, si $\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu$, entonces

$$\nabla_{\dot{\gamma}} v^\mu = \dot{x}^\alpha \nabla_{\partial_\alpha} v^\mu = \dot{x}^\alpha \left(\partial_\alpha v^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\beta \right).$$

Ahora, queremos considerar una curva cuyo vector tangente $\dot{\gamma}$ no cambie de dirección a lo largo de la curva, esto es

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = f(t) \dot{\gamma}$$

Notemos que la única condición que imponemos es que el vector tangente mantenga su dirección, por lo que aún podemos considerar que puede variar su magnitud, esto es justamente lo que mide $f(t)$. En coordenadas, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}^\mu = f(t) \dot{\gamma}^\mu$, como $\nabla_{\dot{\gamma}} = \dot{x}^\alpha \nabla_{\partial_\alpha}$ (propiedad 1. de 1.14), por lo tanto

$$\dot{x}^\alpha \left(\partial_\alpha \dot{\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{\gamma}^\beta \right) = f(t) \dot{\gamma}^\mu \quad (1.12)$$

Sin embargo, siempre es posible reparametrizar γ , digamos bajo el parámetro λ , de tal manera que $f(\lambda) = 0$. Bajo este parámetro y reescribiendo, la ecuación (1.12) queda como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.13)$$

Esta ecuación se conoce como **ecuación de la geodésica**. Así, cualquier curva que satisfaga (1.13) es el análogo a la línea recta en espacios curvos. Intuitivamente, sabemos que las rectas minimizan distancias en espacios euclidianos, es esperable que la geodésica haga lo propio en espacios con curvatura distinta de cero, pues acabamos de ver que generaliza lo que son las líneas rectas. A continuación veremos que efectivamente minimiza distancias.

Con esto hemos deducido la ecuación de la geodésica y podemos formalizar alguno de los conceptos usados. La derivada covariante $\nabla_{\dot{\gamma}} v$ describe, cómo cambia el campo vectorial v a lo largo de la curva γ . En particular, si queremos que v mantenga su dirección y módulo al movernos sobre γ , decimos que el vector es **transportado paralelamente** a lo largo de la curva γ . A continuación definimos transporte paralelo formalmente.

Definición 1.19 (Transporte paralelo). Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva suave con vector tangente $\dot{\gamma}$. Un campo vectorial v a lo largo de γ se dice que es transportado paralelamente, si

$$\nabla_{\dot{\gamma}} v = 0$$

Ahora, usando esta definición de transporte paralelo también podemos formalizar el concepto de geodésica, bajo la siguiente definición.

Definición 1.20 (Geodésica). Una curva suave $\gamma: I \rightarrow M$ se llama **geodésica** si su vector tangente $\dot{\gamma}$ se transporta paralelamente a si mismo, es decir

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

Observación. Notemos que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ se puede escribir, en coordenadas, como $\dot{x}^\alpha \nabla_\alpha \dot{x}^\mu$ (recordando que $\dot{\gamma} = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha$). Así, podemos ver que

$$\dot{x}^\alpha \nabla_\alpha \dot{x}^\beta = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \left(\frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Esto motiva la definición de la derivada covariante de un campo vectorial v a lo largo de una curva de componentes $x^\mu(\tau)$,

$$\frac{Dv^\mu}{d\tau} := \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu v^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (1.14)$$

Más adelante en el capítulo 4 haremos uso de esta definición, que no es más que la expansión de $\dot{x}^\nu \nabla_\nu v^\mu$.

Ejemplo 1.8. El ejemplo más claro de que la geodésica generaliza la línea recta es tomar como variedad $\mathbb{R}^n$. En este espacio la curvatura es nula y en consecuencia los símbolos de Christoffel se anulan en todo punto. Así, la ecuación de la geodésica 1.13 se reduce a $dx^2/d\lambda^2 = 0$, que representa la línea recta en el espacio euclideno $x(\lambda) = \alpha\lambda + p$, $\alpha, p \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1.9. Consideremos la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. En coordenadas esféricas (θ, φ) , con

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta, \quad (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

Diferenciando las componentes, vemos que la métrica sobre la esfera viene dada por $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Vemos que, $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta$ y $g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$. Con estas componentes se obtienen los símbolos de Christoffel, que son

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta.$$

Usamos la ecuación (1.13) par obtener las geodésicas de la esfera. Así, obtenemos

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (1.15a)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0, \quad (1.15b)$$

donde el punto denota derivada respecto del parámetro afín λ . Por lo tanto, cualquier curva sobre la esfera

$$\gamma(\lambda) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

tal que (θ, φ) satisfagan (1.15), será una curva geodésica sobre $\mathbb{S}^2$. Concretamente, podemos verificar que el ecuador es una geodésica sobre la esfera, en el ecuador se tiene que $\theta(\lambda) = \pi/2$ y $\varphi(\lambda) = \lambda$, es fácil ver que se satisfacen (1.15). Así, comprobamos que el ecuador es una geodésica en la esfera.

1.2.3. Ecuaciones de Campo

En las secciones anteriores hemos descrito el espacio-tiempo como una variedad lorentziana (M, g) y hemos estudiado la cinemática de partículas de prueba a través de las curvas geodésicas. Para completar la formulación de la Relatividad General, es necesario establecer la relación dinámica entre la geometría del espacio-tiempo y el contenido material y energético presente en él. Una derivación rigurosa de las ecuaciones de campo puede obtenerse a partir del principio variacional aplicado a la acción de Hilbert–Einstein

$$S[g, \Psi] = \frac{c^3}{16\pi G} \int_M R \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{mat}}[g, \Psi],$$

donde, $S_{\text{mat}}[g, \Psi]$ representa la acción de la materia y Ψ denota de manera genérica los campos no gravitacionales. Al extremar esta acción se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein. Dado que esta derivación es extensa y no forma parte del objetivo central de estos preliminares, remitimos al lector al Apéndice E de [Wal84]. En su lugar, a continuación presentamos la motivación geométrica y física de las ecuaciones de campo.

Para describir matemáticamente la distribución de materia y energía, introducimos el **tensor de energía-momento**, denotado por $T_{\mu\nu}$. Este es un campo tensorial simétrico de tipo $(0, 2)$ cuyas componentes codifican la densidad de energía, el flujo de energía (momento) y los esfuerzos (presiones y tensiones) de la materia y los campos no gravitacionales.

Un postulado fundamental de la física clásica es la conservación local de la energía y el momento. En el lenguaje de la geometría diferencial sobre una variedad pseudoriemanniana, este principio de conservación se expresa exigiendo que la divergencia covariante del tensor de energía-momento sea nula:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{1.16}$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g .

Por otro lado, desde el punto de vista puramente geométrico, sabemos que el tensor de curvatura de Riemann satisface las identidades de Bianchi. Al contraer estas identidades dos veces, se obtiene un resultado fundamental para la relatividad general: el **tensor de Einstein**, definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \tag{1.17}$$

y que como vimos en la ecuación (1.11), posee divergencia nula:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.18)$$

La coincidencia de estas dos propiedades matemáticas, la divergencia nula impuesta por la conservación física en $T_{\mu\nu}$ y la divergencia nula garantizada por la geometría en $G_{\mu\nu}$ fue una de las cosas que motivó a Albert Einstein a postular que ambas cantidades deben ser proporcionales¹. Esto da lugar a las **Ecuaciones de Campo de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

o, de manera explícita:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

donde c es la velocidad de la luz y G la constante de gravitación universal.

Notemos el carácter no lineal de estas ecuaciones. El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar R involucran productos de los símbolos de Christoffel, los cuales a su vez dependen de la inversa de la métrica y de sus primeras derivadas. En consecuencia, las ecuaciones de campo son un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas y no lineales de segundo orden para las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Esta no linealidad hace que encontrar soluciones exactas sea una tarea analítica compleja. Para estudiar fenómenos dinámicos como la propagación de ondas en el espacio-tiempo, nos veremos obligados a estudiar el régimen de campo débil, introduciendo una perturbación sobre una métrica de fondo conocida. Este procedimiento, conocido como la linealización de la relatividad general, será estudiado en el siguiente capítulo.

¹Históricamente, esta exigencia estuvo acompañada además por la necesidad de recuperar el límite newtoniano y por otras heurísticas físicas discutidas por Norton [Nor20].

Capítulo 2

Linealización de la Relatividad General

Para estudiar las ondas gravitacionales dentro del marco de la relatividad general, es necesario considerar perturbaciones pequeñas de la métrica del espacio-tiempo. En este capítulo, partimos de una métrica cercana a la de Minkowski y desarrollamos una aproximación lineal de las ecuaciones de Einstein, lo que nos permitirá describir la propagación de perturbaciones métricas en el vacío.

Partimos de la métrica de Minkowski perturbada,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $|\varepsilon| \ll 1$.

Para realizar cálculos posteriores, necesitamos la expresión de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$. Buscamos su inversa, a primer orden, de la forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varepsilon k^{\mu\nu}$$

donde $k^{\mu\nu}$ es desconocido. Calculamos:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = (\eta^{\mu\alpha} + \varepsilon k^{\mu\alpha}) (\eta_{\alpha\nu} + \varepsilon h_{\alpha\nu})$$

Notemos que $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$, luego

$$\delta_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \eta^{\mu\alpha} \varepsilon h_{\alpha\nu} + \varepsilon k^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Así, obtenemos que

$$\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + k^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = 0.$$

Despejamos,

$$k^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = -\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}.$$

Multiplicamos por $\eta^{\nu\beta}$:

$$k^{\mu\alpha} (\eta_{\alpha\nu} \eta^{\nu\beta}) = -\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \eta^{\nu\beta} \implies k^{\mu\beta} = -\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\nu} = -h^{\mu\beta}.$$

Por tanto, la inversa de la métrica perturbada, a primer orden, es

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Para linealizar las ecuaciones de campo, debemos linealizar todas sus componentes. Comenzamos linealizando los símbolos de Christoffel. Recordemos de la definición (1.6), que los símbolos de Christoffel vienen dados por,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_{\nu} g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}).$$

Notemos que $\partial_{\nu} g_{\alpha\mu} = \partial_{\nu} (\eta_{\alpha\mu} + \varepsilon h_{\alpha\mu}) = \varepsilon \partial_{\nu} h_{\alpha\mu}$. Así, tenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} (\eta^{\sigma\alpha} - \varepsilon h^{\sigma\alpha}) \varepsilon (\partial_{\nu} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu})$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_{\nu} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

Con los símbolos de Christoffel linealizados podemos proceder a linealizar el tensor de Riemann, que es la base de la ecuación de campo. Recordemos que el tensor de Riemann viene dado por

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}.$$

Como $\Gamma\Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, obtenemos que $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Así,

$$\begin{aligned} R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_{\mu} \left(\frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma}) \right) \\ &\quad - \partial_{\nu} \left(\frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\alpha\sigma} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\alpha\sigma} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Así, llegamos a que el **tensor de Riemann linealizado** es

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4)$$

El tensor de Ricci se obtiene de la contracción del tensor de Riemann: $R_{\sigma\nu} = R^{\mu}{}_{\sigma\mu\nu}$. Por lo tanto, contrayendo (2.4), nos queda

$$R_{\sigma\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\mu\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Analizamos cada término por separado, incluyendo el factor $\eta^{\mu\alpha}$

- $\eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu} = \partial_\mu \partial_\sigma (\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}) = \partial_\mu \partial_\sigma h^\mu{}_\nu.$
- $\eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma} = \square h_{\nu\sigma},$ donde $\square := \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha.$
- $\eta^{\mu\alpha} \partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu} = \partial_\nu \partial_\sigma (\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\mu}) = \partial_\nu \partial_\sigma h,$ donde $h := \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\mu}.$
- $\eta^{\mu\alpha} \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma} = \partial_\nu \partial_\alpha (\eta^{\mu\alpha} h_{\mu\sigma}) = \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\sigma.$

Así, nos queda que el **tensor de Ricci linealizado** es

$$R_{\sigma\nu} = \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^\mu{}_\nu - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.5)$$

Finalmente, linealizamos el escalar de Ricci $R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}.$ Usando (2.2) vemos que

$$R = (\eta^{\sigma\nu} - \varepsilon h^{\sigma\nu}) R_{\sigma\nu} = \eta^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\sigma\nu} (\partial_\mu \partial_\sigma h^\mu{}_\nu - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h + \partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha{}_\sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h - \square h + \partial_\nu \partial_\alpha h^{\nu\alpha}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (2\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - 2\square h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **escalar de Ricci linealizado** es

$$R = \varepsilon (\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.6)$$

Ahora, construimos el tensor de Einstein con los tensores linealizados (2.5) y (2.6),

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha{}_\nu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\beta \partial_\nu h^\beta{}_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) \varepsilon (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha{}_\nu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\beta \partial_\nu h^\beta{}_\mu) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **tensor de Einstein linealizado** es

$$G_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha{}_\nu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\beta \partial_\nu h^\beta{}_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.7)$$

Notemos que, $\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial^\alpha h_{\alpha}{}^\nu.$ En efecto

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial_\mu (\eta^{\alpha\mu} h_{\alpha}{}^\nu) = \underbrace{(\partial_\mu \eta^{\alpha\mu})}_{=0} h_{\alpha}{}^\nu + \eta^{\alpha\mu} (\partial_\mu h_{\alpha}{}^\nu) = \partial^\alpha h_{\alpha}{}^\nu.$$

Usamos esta relación para variar los índices del tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial^\beta \partial_\nu h_{\beta\mu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Definimos la **traza revertida** de la perturbación,

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (2.8)$$

de forma que $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$. Así,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} & \left(\partial^\alpha \partial_\mu \left(\bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} h \right) - \square \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) - \partial_\mu \partial_\nu h \right. \\ & \left. + \partial^\beta \partial_\nu \left(\bar{h}_{\beta\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\beta\mu} h \right) - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \left(\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) + \eta_{\mu\nu} \square h \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Bajando índices, notando que $\square = \partial^\alpha \partial_\alpha$ y simplificando, vemos que podemos escribir el tensor (2.7), como

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \quad (2.9)$$

En el capítulo siguiente impondremos condiciones de gauge, que nos permitirán deducir la existencia de ondas gravitacionales.

Capítulo 3

Transformaciones de Gauge

La elección de la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$, con $|\varepsilon| \ll 1$ no es única. Para entender esto geoméricamente, consideremos las siguientes variedades:

- **Variedad del fondo plano** (M_b): equipado con la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$.
- **Variedad física** (M_p): con métrica $g_{\alpha\beta}$ que satisface las ecuaciones de Einstein.

Consideramos el difeomorfismo $\phi: M_b \rightarrow M_p$, (que existe debido a que la variedad es la misma, sólo cambiamos la métrica) y definimos la perturbación mediante el pullback de $g_{\mu\nu}$, llevando la métrica $g_{\alpha\beta}$ de M_p a M_b :

$$h_{\mu\nu} := \phi^* g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}.$$

Así, la perturbación $h_{\mu\nu}$ depende de la elección del difeomorfismo ϕ , esto se conoce como **libertad de gauge**. En principio, la perturbación no tiene por qué ser pequeña, sin embargo, si los campos gravitacionales en M_p son pequeños, entonces habrán algunos difeomorfismos ϕ en que la perturbación se podrá escribir como $\varepsilon h_{\mu\nu}$, con ε pequeño [Car97].

Consideremos un campo vectorial ξ^μ en M_b , este campo define un flujo $\psi_s: M_b \rightarrow M_b$. Si cambiamos la identificación a $\phi \circ \psi_{-s}$, obtenemos una familia de perturbaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon h_{\mu\nu}^{(s)} &= [(\phi \circ \psi_{-s})^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ &= \psi_{-s}^* (\phi^* g_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \\ &= \psi_{-s}^* (\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \\ &= \varepsilon \psi_{-s}^* h_{\mu\nu} + \psi_{-s}^* \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Para s pequeño $\psi_{-s}^* h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}$ y vemos que:

$$\begin{aligned}\varepsilon h_{\mu\nu}^{(s)} &= \varepsilon h_{\mu\nu} + -s \left[\frac{\psi_{-s}^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{-s} \right] \\ &= \varepsilon h_{\mu\nu} - s \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu},\end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_\xi$ es la derivada de Lie en la dirección ξ^μ . Por lo tanto, la variación inducida por esta reidentificación es

$$\varepsilon \delta h_{\mu\nu} = -s \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}.$$

Tomando $s = \varepsilon$ para que la reidentificación sea del mismo orden de la perturbación y así simplificar la expresión, nos queda que

$$\delta h_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}.$$

La derivada de Lie, en nuestro caso es compatible con la métrica y sin torsión, por lo tanto, en el fondo plano de Minkowski con coordenadas cartesianas $\nabla = \partial$ y $\partial\eta = 0$,

$$\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \quad (3.1)$$

(ver proposición 1.6).

La ecuación (3.1) expresa la libertad de gauge en relatividad linealizada. Distintos campos $h_{\mu\nu}$ relacionados por un campo vectorial ξ^μ describen la misma geometría física a primer orden, pues corresponden a distintas reidentificaciones del fondo plano. Esta libertad permite imponer 4 condiciones adicionales, una por cada componente de ξ^μ , con el fin de eliminar grados de libertad no físicos y simplificar las ecuaciones.

En el capítulo anterior introdujimos la perturbación de traza revertida $\bar{h}_{\mu\nu}$. La razón de trabajar con $\bar{h}_{\mu\nu}$ es que la combinación $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}$ aparece de seguidamente en el tensor de Einstein linealizado (2.9). En la siguiente sección mostraremos que, mediante una elección adecuada de ξ^μ , siempre podemos imponer que esta divergencia se anule, esta elección se conoce como **gauge de Lorentz**.

3.1. Gauge de Lorentz

A continuación, mostraremos que existe un sistema de coordenadas en el que podemos imponer $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$, conocido como **gauge de Lorentz**, que nos permitirá reducir la complejidad del tensor de Einstein, simplificando términos y reduciendo grados de libertad no físicos.

Proposición 3.1. Existe un sistema de coordenadas en el cual se cumple

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Demostración. Consideremos un cambio infinitesimal de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (3.3)$$

su inversa es

$$x^\mu = x'^\mu - \varepsilon \xi^\mu(x') + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Derivando,

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \varepsilon \partial_\mu \xi^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu + \varepsilon \partial_\alpha \xi'^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Usando la ley de transformación tensorial para la métrica,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x),$$

y escribiendo $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta}$, obtenemos

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= (\delta_\mu^\alpha - \varepsilon \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \varepsilon \partial_\nu \xi^\beta) (\eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} - \varepsilon (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

Por definición de $h'_{\mu\nu}$,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu}(x') + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

luego

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (3.4)$$

Así, definimos

$$\delta h_{\mu\nu} := h'_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu). \quad (3.5)$$

Usamos la traza y la traza revertida definidas en el capítulo 2:

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad \text{y} \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h.$$

Contrayendo (3.4), vemos que

$$\delta h = \eta^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu} = -2 \partial_\mu \xi^\mu,$$

y luego

$$\delta \bar{h}_{\mu\nu} = \delta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \delta h = -(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha. \quad (3.6)$$

Elevando un índice y tomando la divergencia,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \delta \bar{h}^\mu{}_\nu &= \partial_\mu \left[-(\partial^\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi^\mu) + \delta^\mu_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha \right] \\
&= -\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \xi^\mu + \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= -\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu \\
&= -\square \xi_\nu,
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\partial_\mu \bar{h}'^\mu{}_\nu = \partial_\mu (\bar{h}^\mu{}_\nu + \delta \bar{h}^\mu{}_\nu) = \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu - \square \xi_\nu.$$

Luego, si escogemos ξ_ν como solución de

$$\square \xi_\nu = \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu,$$

se sigue que $\partial_\mu \bar{h}'^\mu{}_\nu = 0$.

□

Observación. El cambio infinitesimal de coordenadas (3.3) corresponde al flujo ψ_s del campo vectorial ξ , que satisface $\psi_{-s}^* \eta = \eta - s \mathcal{L}_\xi \eta$. Así, la transformación (3.4) es equivalente a $\delta h_{\mu\nu} = -(\mathcal{L}_\xi \eta)_{\mu\nu}$.

Mostraremos qué sucede con los términos del tensor de Einstein al elegir el gauge de Lorentz. Tenemos:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Luego,

- $\partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha (\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}) = 0$, pues $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$.
- $\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \partial_\mu \bar{h}^\alpha{}_\nu = \partial_\alpha \partial_\mu \eta_{\beta\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\beta\nu} \partial_\mu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) = 0$.
- $\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} = \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\alpha = \partial_\alpha \partial_\nu \eta_{\beta\mu} \bar{h}^{\beta\alpha} = \eta_{\beta\mu} \partial_\nu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) = 0$.

Así, si tomamos el gauge de Lorentz, el tensor de Einstein nos queda:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\varepsilon}{2} \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Luego, si estamos en el vacío y despreciamos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, obtenemos,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.7}$$

Esto muestra que la métrica, bajo el gauge de Lorentz, obedece una ecuación de onda en el vacío.

Surge una pregunta natural: ¿Cómo sabemos que esta elección de coordenadas no restringe la física? En otras palabras, cómo asegurar que lo que se derive luego de imponer $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ no es sólo válido en un sistema particular de coordenadas. Invocar el principio de covarianza en este caso resulta delicado, pues estamos trabajando en relatividad linealizada y esto nos aleja de la formulación covariante de la relatividad general. Lo que asegura que no estamos trabajando en un marco que tiene validez en un sistema de coordenadas en específico es que el gauge de Lorentz deja invariante el tensor de Riemann linealizado.

Proposición 3.2. El tensor de Riemann linealizado (2.4) es invariante bajo el gauge de Lorentz.

Demostración. Consideramos el cambio infinitesimal (3.3). A primer orden, la perturbación transforma como (3.4)

El tensor de Riemann linealizado viene dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma} \right).$$

Tomando variación en el tensor linealizado obtenemos

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu \partial_\sigma \delta h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha \delta h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma \delta h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial_\alpha \delta h_{\mu\sigma} \right), \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.8) resulta

$$\begin{aligned} \delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -\frac{\varepsilon}{2} \eta^{\rho\alpha} \Big[& \partial_\mu \partial_\sigma (\partial_\alpha \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\alpha) - \partial_\mu \partial_\alpha (\partial_\nu \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\nu) \\ & - \partial_\nu \partial_\sigma (\partial_\alpha \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\alpha) + \partial_\nu \partial_\alpha (\partial_\mu \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\mu) \Big]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como las derivadas parciales conmutan, los términos se cancelan a pares y resulta

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0.$$

Por lo tanto, el tensor de Riemann linealizado es invariante bajo transformaciones de gauge. $\square$

Observación. Este resultado no depende de imponer el gauge de Lorentz, vale para cualquier ξ^μ suave. En particular, al escoger ξ^μ para satisfacer $\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = 0$, el tensor $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ (a primer orden) permanece invariante.

La solución más directa de $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ está dada por ondas planas de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left\{ A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right\}, \quad (3.10)$$

donde $A_{\mu\nu}$ es un tensor constante y

$$k_\sigma x^\sigma = -\frac{\omega}{c}x^0 + k^1x^1 + k^2x^2 + k^3x^3 = -\frac{\omega}{c}ct + k^1x + k^2y + k^3z.$$

Afirmación. Si (3.10) es solución de (3.7), entonces $k_\alpha k^\alpha = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\square \bar{h}_{\mu\nu} &= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}_{\mu\nu} \\ &= \text{Re} \left\{ \eta^{\alpha\beta} A_{\mu\nu} i k_\alpha i k_\beta e^{i k_\sigma x^\sigma} \right\} \\ &= -k_\alpha k^\alpha \bar{h}_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Si $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ y la solución es no trivial, entonces

$$k_\alpha k^\alpha = 0.$$

□

La condición $k_\alpha k^\alpha = 0$ significa que el covector de onda es nulo. Si escribimos $k^\alpha = (\omega/c, \vec{k})$, entonces dicha condición implica

$$-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + |\vec{k}|^2 = 0,$$

o equivalentemente, $\omega = c|\vec{k}|$. Esta relación muestra que la perturbación se propaga a la velocidad de la luz en el vacío.

Notemos que, en principio, $A_{\mu\nu}$ tiene 16 grados de libertad. Sin embargo, como $\bar{h}_{\mu\nu}$ es simétrico, se reducen a 10 los grados de libertad. Por otro lado, al imponer el gauge de Lorentz, los grados de libertad de la perturbación se reducen a 6, en efecto:

$$0 = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = \text{Re} \left\{ i k_\beta A^{\alpha\beta} e^{i k_\sigma x^\sigma} \right\}$$

Luego, $k_\beta A^{\alpha\beta} = 0$. Bajando índices, concluimos que el gauge de Lorentz implica

$$A_{\alpha\beta} k^\beta = 0 \tag{3.11}$$

Por simplicidad, consideraremos la onda gravitacional viajando sólo en la dirección $+z$, así

$$k_\alpha k^\alpha = -(k^0)^2 + (k^3)^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + (k^3)^2 = 0,$$

por lo tanto, $k^3 = \omega/c$. Quedándonos $k^\beta = (\omega/c, 0, 0, \omega/c)$. Así, tenemos que

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{03} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ 0 \\ 0 \\ \omega/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} (A_{00} + A_{03}) = 0 &\implies A_{03} = -A_{00}, \\ \frac{\omega}{c} (A_{01} + A_{13}) = 0 &\implies A_{13} = -A_{01}, \\ \frac{\omega}{c} (A_{02} + A_{23}) = 0 &\implies A_{23} = -A_{02}, \\ \frac{\omega}{c} (A_{03} + A_{33}) = 0 &\implies A_{33} = -A_{03} = A_{00}. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos quitado 4 grados de libertad y las componentes libres que quedan, son

$$\{A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}, A_{22}\}$$

3.2. Gauge TT

Ahora, usaremos el gauge TT para fijar otras 4 componentes. Primero, notemos que la elección de ξ^α en la transformación $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha$, $|\varepsilon| \ll 1$ no es único, pues recordemos que se requiere que ξ^α satisfaga $\square \xi^\alpha = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}$ y esto nos permite añadir cualquier componente χ^α que cumpla $\square \chi^\alpha = 0$. En efecto:

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = \square(\xi^\alpha + \chi^\alpha) = \square \xi^\alpha + \square \chi^\alpha = \square \xi^\alpha.$$

Así, el gauge de Lorentz conforma un conjunto de sistemas de coordenadas, no sólo un único sistema.

Como χ^α tiene 4 grados de libertad, podemos definir otras 4 restricciones sobre $A_{\mu\nu}$.

Proposición 3.3. Dada la solución de onda plana

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \text{Re} \left\{ A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \right\},$$

podemos realizar una transformación infinitesimal de coordenadas que preserva el gauge de Lorentz y tal que en el nuevo sistema de coordenadas,

$$u^\mu A_{\mu\nu} = 0, \tag{3.12a}$$

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0, \tag{3.12b}$$

donde $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Esto corresponde al gauge TT.

Demostración. Consideremos una transformación infinitesimal de coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \chi^{\mu}(x), \quad |\varepsilon| \ll 1.$$

A primer orden, la perturbación de $\bar{h}'_{\mu\nu}$ se transforma como

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \varepsilon \partial_{\mu} \chi_{\nu} - \varepsilon \partial_{\nu} \chi_{\mu} + \varepsilon \eta_{\mu\nu} \partial_{\rho} \chi^{\rho}, \quad (3.13)$$

(ver transformación (3.6)). Para preservar el gauge de Lorentz, se debe cumplir que $\square \chi^{\mu} = 0$.

Tomamos

$$\chi^{\mu}(x) = \text{Re} \left\{ i \zeta^{\mu} e^{ik_{\rho} x^{\rho}} \right\}, \quad (3.14)$$

donde ζ^{μ} es constante. Como $k_{\rho} k^{\rho} = 0$, se tiene

$$\square \chi^{\mu} = \text{Re} \left\{ -i k_{\rho} k^{\rho} \zeta^{\mu} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \right\} = 0,$$

de modo que esta transformación psatisface el gauge de Lorentz.

Ahora, derivando (3.14) y sustituyendo en (3.13), vemos que

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} &= \text{Re} \left\{ A_{\mu\nu} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \right\} - \varepsilon \text{Re} \left\{ -k_{\mu} \zeta_{\nu} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \right\} - \varepsilon \text{Re} \left\{ -k_{\nu} \zeta_{\mu} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \right\} \\ &\quad + \varepsilon \eta_{\mu\nu} \text{Re} \left\{ -k_{\rho} \zeta^{\rho} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ [A_{\mu\nu} + \varepsilon (k_{\mu} \zeta_{\nu} + k_{\nu} \zeta_{\mu} - \eta_{\mu\nu} k_{\rho} \zeta^{\rho})] e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la amplitud transformada es

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + \varepsilon (k_{\mu} \zeta_{\nu} + k_{\nu} \zeta_{\mu} - \eta_{\mu\nu} k_{\rho} \zeta^{\rho}).$$

Para relajar la notación definimos $C_{\mu} := \varepsilon \zeta_{\mu}$, así,

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + k_{\mu} C_{\nu} + k_{\nu} C_{\mu} - \eta_{\mu\nu} k_{\rho} C^{\rho}.$$

Queremos elegir C_{μ} de modo que

$$u^{\mu} A'_{\mu\nu} = 0, \quad (3.15a)$$

$$\eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = 0, \quad (3.15b)$$

Como $u^{\mu} = (c, 0, 0, 0)$, la condición (3.15a) equivale a $A'_{0\nu} = 0$. Para $\nu = j$, con $j = 1, 2, 3$, se obtiene

$$0 = A'_{0j} = A_{0j} + k_0 C_j + k_j C_0,$$

de donde

$$C_j = -k_0^{-1} (A_{0j} + k_j C_0). \quad (3.16)$$

Ahora consideremos $\nu = 0$. Tenemos

$$0 = A'_{00} = A_{00} + 2k_0 C_0 - \eta_{00} k_\rho C^\rho = A_{00} + 2k_0 C_0 + k_\rho C^\rho = A_{00} + k_0 C_0 + \eta^{ij} k_i C_j$$

Sustituyendo (3.16), se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= A_{00} + k_0 C_0 - \eta^{ij} k_i k_0^{-1} (A_{0j} + k_j C_0) \\ &= A_{00} - \eta^{ij} k_i k_0^{-1} A_{0j} + (k_0 - \eta^{ij} k_i k_j k_0^{-1}) C_0. \end{aligned}$$

Como $k_\rho k^\rho = 0$, se tiene que $\eta^{ij} k_i k_j = k_0^2$. En consecuencia,

$$0 = A_{00} - \eta^{ij} k_i k_0^{-1} A_{0j} \iff 0 = -k_0 A_{00} + \eta^{ij} k_i A_{0j} = \eta^{\mu\nu} k_\mu A_{0\nu},$$

esta última expresión se anula debido al gauge de Lorentz (ver (3.11)). Así, C_0 es arbitrario y la condición (3.15a) queda satisfecha tomando C_j como en la ecuación (3.16).

Nos queda imponer la condición (3.15b),

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} \\ &= \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} (k_\mu C_\nu + k_\nu C_\mu - \eta_{\mu\nu} k_\rho C^\rho) \\ &= A_\mu{}^\mu - 2k_\rho C^\rho \\ &= A_\mu{}^\mu + 2k_0 C_0 - 2\eta^{ij} k_i C_j \\ &= A_\mu{}^\mu + 2k_0 C_0 + 2\eta^{ij} k_i k_0^{-1} (A_{0j} + k_j C_0) \\ &= A_\mu{}^\mu + 4k_0 C_0 + 2\eta^{ij} k_i k_0^{-1} A_{0j}. \end{aligned}$$

Así,

$$C_0 = -\frac{k_0 A_\mu{}^\mu + 2\eta^{ij} k_i A_{0j}}{4k_0^2}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, si fijamos C_0 de acuerdo a (3.17) y C_j como (3.16), entonces las condiciones (3.15) son satisfechas.

□

Por la proposición anterior, existe un sistema de coordenadas en el cual la amplitud satisface

$$u^\mu A_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0.$$

En lo que sigue, trabajaremos en dicho sistema y, por simplicidad de notación, seguiremos denotando por $A_{\mu\nu}$ a la amplitud en estas nuevas coordenadas.

La condición $u^\mu A_{\mu\nu} = 0$ implica $A_{0\nu} = 0$, pues $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ y en consecuencia fija 3 componentes de $A_{\mu\nu}$. En efecto, nos impone que $A_{00} = 0$, $A_{01} = 0$, $A_{02} = 0$. En principio, también fija $A_{03} = 0$, pero esta restricción es redundante pues $A_{00} = -A_{03}$ y ya fijamos A_{00} .

Por último, la condición de traza nula $\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$. Es decir, tenemos que

$$A_{11} + A_{22} = 0,$$

por lo que $A_{11} = -A_{22}$ y con esto hemos fijado otra componente de $A_{\mu\nu}$. Así, sólo nos quedan dos grados de libertad, que definiremos como:

$$A_{11} = -A_{22} \equiv A_+ = |A_+|e^{i\varphi_+} \quad \text{y} \quad A_{12} = A_{21} \equiv A_\times = |A_\times|e^{i\varphi_\times}$$

Por lo tanto, al aplicar el gauge TT, nos queda:

$$A_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que en el gauge TT se tiene que $A_{00}^{\text{TT}} = A_{0j}^{\text{TT}} = 0$ y, para una onda que se propaga en la dirección $+z$, también $A_{3j}^{\text{TT}} = A_{j3}^{\text{TT}} = 0$. Así, podemos representar la amplitud mediante

$$A_{jk}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} A_+ & A_\times & 0 \\ A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, notemos que el gauge TT, implica que $\bar{h}_{jk} = h_{jk}$, en efecto, tenemos que $\bar{h}_{jk} = h_{jk} - \frac{1}{2}\eta_{jk}h$ ($\eta_{jk} = \delta_{jk}$), donde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$ por la condición de traza nula del gauge TT. Por lo tanto, bajo el gauge TT, se tiene que

$$\bar{h}_{jk}^{\text{TT}} = h_{jk}^{\text{TT}} \tag{3.18}$$

Usamos el superíndice TT para recalcar que estamos dentro del gauge TT.

Capítulo 4

Medición de una Onda Gravitacional

Analizaremos la acción de una onda gravitacional en la separación de dos partículas de prueba, A y B . Definiremos un marco de referencia propio sobre A . Consideramos la línea de mundo de A :

$$x_A^\mu(\tau) = (c\tau, 0, 0, 0), \quad u^\mu = \frac{dx_A^\mu}{d\tau} = (c, 0, 0, 0)$$

En coordenadas de Fermi normales centradas en A ,

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \delta_{jk} dx^j dx^k + \mathcal{O}(|x^j|^2) dx^\alpha dx^\beta$$

Sea $n^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu$ el vector que une A con la otra partícula B .

Proposición 4.1. La ecuación de desviación geodésica para el vector n^μ es

$$\frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} u^\alpha n^\nu u^\beta, \quad (4.1)$$

donde $D/d\tau$ es el operador introducido en (1.14). En particular, para las componentes espaciales,

$$\frac{D^2 n^j}{d\tau^2} = -R^j{}_{\alpha k\beta} u^\alpha n^k u^\beta.$$

Demostración. Tenemos $Dn^\mu/d\tau = dn^\mu/d\tau + \Gamma_{\nu\rho}^\mu n^\nu dx^\rho/d\tau$. Así,

$$\frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} = \underbrace{\frac{d}{d\tau} \left(\frac{Dn^\mu}{d\tau} \right)}_{(*)} + \underbrace{\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{Dn^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}}_{(**)}$$

Ahora, si consideramos dos geodésicas vecinas $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$, con

$|\xi^\mu| \ll 1$, entonces $x^\mu(\tau)$ satisface la ecuación de la geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0,$$

mientras que $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$ satisface

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + \xi) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} = 0.$$

Podemos escribir esta ecuación, a primer orden, como

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (4.2)$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} (\Gamma_{\nu\rho}^\mu) \xi^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\nu \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} \quad (4.3)$$

donde:

- $\frac{d}{d\tau} \Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{dx^\sigma}{d\tau} \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu,$
- $\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$

Sustituimos en (4.3):

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\sigma}{d\tau} (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu) \xi^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (\star)$$

Por otro lado, el término $(\star\star)$ es

$$\Gamma_{\lambda\rho}^\mu \frac{D\xi^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \left(\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{k\sigma}^\lambda \xi^k \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (4.4)$$

Sumamos $(\star)$ y (4.4), quedándonos:

$$\frac{D^2 \xi}{d\tau^2} = \underbrace{\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau}}_{\stackrel{(4.2)}{=} -\xi^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}} + \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \xi^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} + [\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{k\rho}^\lambda - \Gamma_{k\lambda}^\mu \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda] \xi^k \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

Así, renombrando índices mudos, obtenemos

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = [\partial_\sigma \Gamma_{k\rho}^\mu - \partial_k \Gamma_{\sigma\rho}^\mu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{k\rho}^\lambda - \Gamma_{k\lambda}^\mu \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda] \frac{dx^\sigma}{d\tau} \xi^k \frac{dx^\rho}{d\tau} = -R^\mu{}_{\rho k \sigma} \xi^k \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}.$$

□

Usamos la ecuación (4.1) con $u^\mu = dx_A^\mu/d\tau$, pero como $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$, la ecuación de desviación nos queda

$$\begin{aligned}\frac{D^2 n^j}{d\tau^2} &= -c^2 R^j{}_{0k0} n^k \\ &= -c^2 R_{j0k0} n^k\end{aligned}$$

donde usamos $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ para bajar índices. Sobre la línea de mundo de A ($x_A^j = 0$) los símbolos de Christoffel se anulan ($\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$). Como además $n^j = x_B^j$ (pues A está en el origen), el covariante $D/d\tau$ se reduce a la derivada ordinaria, por lo tanto,

$$\frac{d^2 x_B^j}{d\tau^2} = -c^2 R_{j0k0} x_B^k$$

Por otro lado, el tensor de Riemann linealizado (2.4) en el gauge TT satisface

$$R_{j0k0}^{\text{TT}} = -\frac{\varepsilon}{2c^2} \frac{\partial^2 h_{jk}^{\text{TT}}}{\partial \tau^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Así,

$$\frac{d^2 x_B^j}{d\tau^2} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{jk}^{\text{TT}}}{\partial \tau^2} \right) x_B^k + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.5)$$

Si antes de la llegada de la onda gravitacional las partículas estaban en reposo con respecto a la otra y su separación inicial era x_{B0}^j , entonces integramos (4.5) y obtenemos,

$$x_B^j(\tau) = x_{B0}^k \left(\delta_{jk} + \frac{\varepsilon}{2} h_{jk}^{\text{TT}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Luego, contraemos:

$$\begin{aligned}\delta_{ij} x_B^i x_B^j &= \delta_{ij} \left(x_{B0}^i + \frac{\varepsilon}{2} h_{ik}^{\text{TT}} x_{B0}^k \right) \left(x_{B0}^j + \frac{\varepsilon}{2} h_{jl}^{\text{TT}} x_{B0}^l \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{ij} x_{B0}^i x_{B0}^j + \frac{\varepsilon}{2} \delta_{ij} \left(h_{ik}^{\text{TT}} x_{B0}^k x_{B0}^j + h_{jl}^{\text{TT}} x_{B0}^l x_{B0}^i \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{ij} x_{B0}^i x_{B0}^j + \frac{\varepsilon}{2} \left(h_{jk}^{\text{TT}} x_{B0}^k x_{B0}^j + h_{il}^{\text{TT}} x_{B0}^l x_{B0}^i \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{ij} x_{B0}^i x_{B0}^j + \varepsilon h_{jk}^{\text{TT}} x_{B0}^j x_{B0}^k + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Si escribimos

$$h_{jk}^{\text{TT}} = \text{Re} \left\{ A_{jk} e^{ik_\mu x^\mu} \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}\delta_{ij} x_B^i x_B^j &= \delta_{ij} x_{B0}^i x_{B0}^j + \varepsilon \text{Re} \left\{ (A_{11} (x_{B0}^1)^2 + A_{22} (x_{B0}^2)^2 + 2A_{12} x_{B0}^1 x_{B0}^2) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{ij} x_{B0}^i x_{B0}^j + \varepsilon \text{Re} \left\{ |A_+| \left((x_{B0}^1)^2 - (x_{B0}^2)^2 \right) e^{ik_\mu x^\mu} + 2|A_\times| x_{B0}^1 x_{B0}^2 e^{ik_\mu x^\mu} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Tomando

$$A_+ = |A_+|e^{i\varphi_+}, \quad A_\times = |A_\times|e^{i\varphi_\times},$$

y restringiéndonos al plano transversal $z = 0$, obtenemos,

$$\begin{aligned} \delta_{ij}x_B^i x_B^j = \delta_{ij}x_{B0}^i x_{B0}^j + \varepsilon \left[|A_+| \left((x_{B0}^1)^2 - (x_{B0}^2)^2 \right) \cos(\omega t - \varphi_+) \right. \\ \left. + 2|A_\times| x_{B0}^1 x_{B0}^2 \cos(\omega t - \varphi_\times) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Comentario: Para una onda que se propaga en la dirección $+z$, en general la dependencia espacial y temporal se escribe como $e^{-i(\omega t - kz)}$. Sin embargo, para describir la deformación de un anillo de partículas situado en el plano transversal del detector, tomamos $z = 0$.

Para visualizar el efecto físico de cada polarización sobre partículas de prueba, consideremos un anillo de radio R de masas inicialmente en reposo (figuras 4.1 y 4.2).

Polarización $+$. Si sólo está presente la polarización $+$, entonces la ecuación (4.6) queda

$$\delta_{ij}x_B^i x_B^j = \delta_{ij}x_{B0}^i x_{B0}^j + \varepsilon |A_+| \left((x_{B0}^1)^2 - (x_{B0}^2)^2 \right) \cos(\omega t - \varphi_+) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Para una partícula del anillo de masas situada inicialmente sobre el eje x , por ejemplo, en $(x_{B0}^1, x_{B0}^2) = (R, 0)$, se tiene

$$\delta_{ij}x_B^i x_B^j = R^2 + \varepsilon |A_+| R^2 \cos(\omega t - \varphi_+) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Por otra parte, para una partícula situada inicialmente sobre el eje y , por ejemplo, $(x_{B0}^1, x_{B0}^2) = (0, R)$, se tiene

$$\delta_{ij}x_B^i x_B^j = R^2 - \varepsilon |A_+| R^2 \cos(\omega t - \varphi_+) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Por lo tanto, las partículas ubicadas sobre los ejes x e y oscilan en oposición de fase, es decir, cuando la distancia al origen aumenta en una dirección, disminuye en la dirección perpendicular. Esto muestra que la polarización $+$ produce una deformación alternada a lo largo de los ejes coordenados, tal como se observa en la figura 4.1.

Polarización $\times$. Si sólo está presente la polarización $\times$, entonces la ecuación (4.6) queda

$$\delta_{ij}x_B^i x_B^j = \delta_{ij}x_{B0}^i x_{B0}^j + 2\varepsilon |A_\times| x_{B0}^1 x_{B0}^2 \cos(\omega t - \varphi_\times) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Para una partícula situada sobre la diagonal del anillo, por ejemplo, en

$$(x_{B0}^1, x_{B0}^2) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right),$$

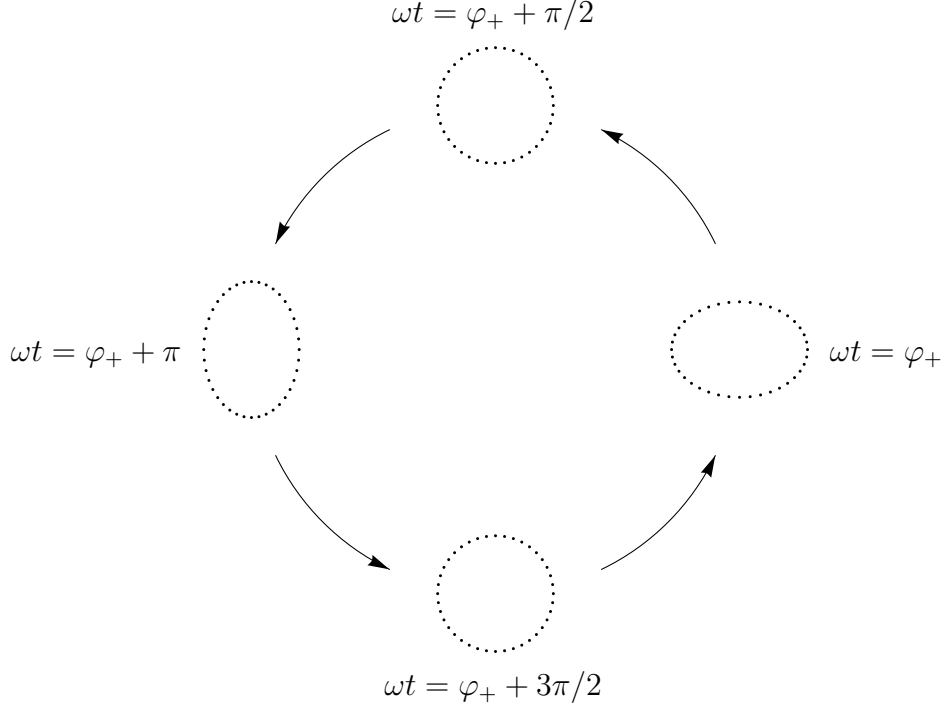


Fig. 4.1: Polarización $+$ ($|A_+| \neq 0$, $|A_\times| = 0$).

obtenemos

$$\delta_{ij}x_B^i x_B^j = R^2 + \varepsilon|A_\times|R^2 \cos(\omega t - \varphi_\times) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Mientras que, para una partícula diametralmente opuesta a la anterior, es decir, en

$$(x_{B0}^1, x_{B0}^2) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}} \right),$$

se tiene

$$\delta_{ij}x_B^i x_B^j = R^2 - \varepsilon|A_\times|R^2 \cos(\omega t - \varphi_\times) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Así, las partículas situadas sobre diagonales perpendiculares oscilan en oposición de fase. Esto muestra que la polarización $\times$ produce una deformación rotada 45° respecto de la polarización $+$, como se ilustra en la figura 4.2.

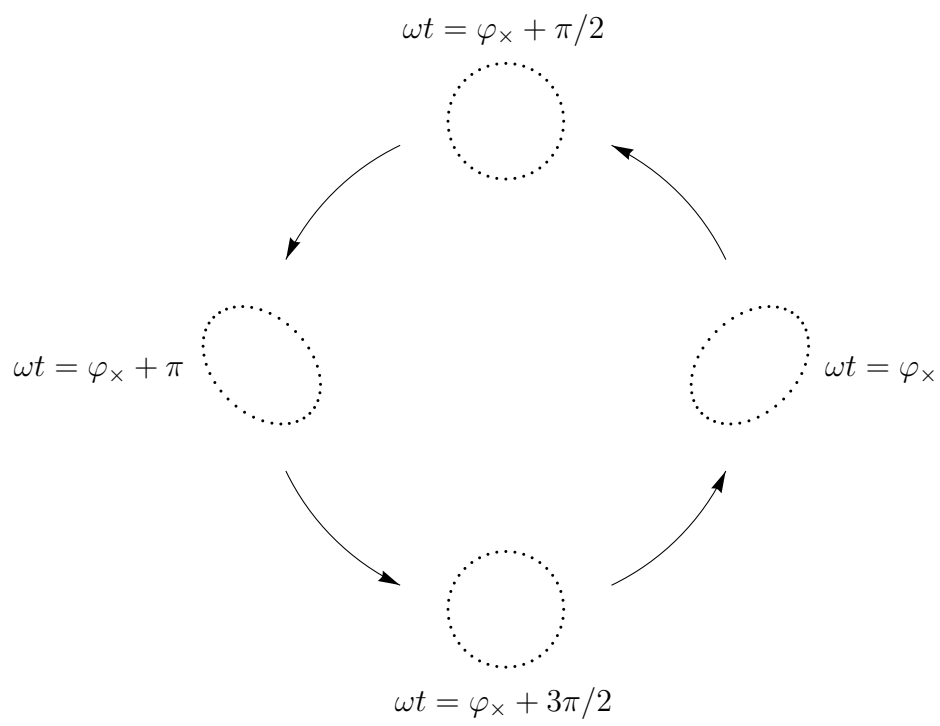


Fig. 4.2: Polarización $\times$ ($|A_x| \neq 0$, $|A_+| = 0$).

Capítulo 5

Generación de Ondas Gravitacionales

Estudiaremos la fuente de una onda gravitacional. Ahora, no podemos despreciar el tensor energía momento, pues será distinto de vacío en la fuente que origina la onda gravitacional. Consideremos el siguiente bosquejo de la situación.

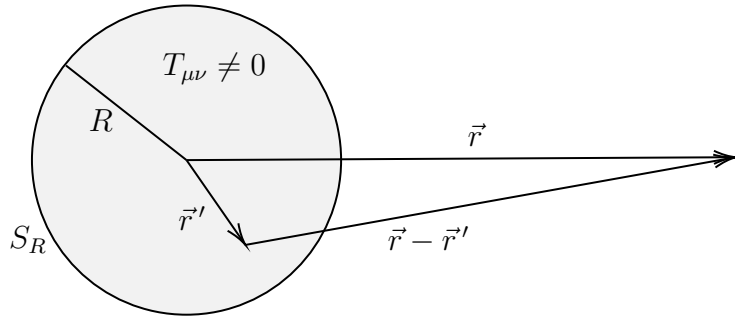


Fig. 5.1: Aproximación zona lejana

Nos interesa calcular el campo $\bar{h}_{\mu\nu}$ en la zona lejana a la fuente, donde está localizado el detector de la onda y podemos aproximarla a un frente de onda plano. Es decir, tomamos $|\vec{r}| \gg R$. Así, en el gauge de Lorentz y considerando la fuente, tenemos la siguiente ecuación:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

Para resolver (5.1) se introduce la función de Green del operador $\square$, que se define como la distribución $G(t, \vec{r}; t', \vec{r}')$ que satisface

$$\square G(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.2)$$

Notemos que si definimos

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' G(t, \vec{r}; t', \vec{r}') T_{\mu\nu}(t', \vec{r}'), \quad (5.3)$$

entonces, al aplicar $\square$ sobre (5.3) y usando (5.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) &= -\frac{16\pi G}{c^4} \int dt' d^3 r' \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') T_{\mu\nu}(t', \vec{r}') \\ &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}(t, \vec{r}), \end{aligned}$$

lo que verifica (5.1).

Proposición 5.1. La función de Green retardada

$$G(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t'\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.4)$$

es solución de (5.2).

Demostración. Definimos la transformada de Fourier espacio-temporal como (por simplicidad fijamos la fuente en el origen):

$$\tilde{G}(\omega, \vec{k}) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt G(r, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (5.5)$$

$$G(t, \vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (5.6)$$

La delta de Dirac tiene la representación

$$\delta(t) \delta^{(3)}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (5.7)$$

Aunque el término $\delta(t)\delta^{(3)}(\vec{r})$ no es una función ordinaria, puede interpretarse como una distribución temperada. En este marco, la transformada de Fourier se entiende en el sentido de distribuciones temperadas, para un tratamiento más formal, ver [BB15]. Sustituyendo (5.6) y (5.7) en (5.2), y usando que

$$\square e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

obtenemos:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \tilde{G}(\omega, \vec{k}) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{G}(\omega, \vec{k}) = \frac{c^2}{\omega^2 - k^2 c^2}. \quad (5.8)$$

Así, la integral que debemos resolver es

$$G(t, \vec{r}) = c^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 k^2}}_{I_\omega} \quad (5.9)$$

Primero, evaluamos la integral en ω . Utilizamos el teorema del residuo, donde tenemos los polos $\omega = \pm ck$. Como los polos se encuentran sobre el eje real, debemos desplazarlos infinitesimalmente al semiplano inferior ($\omega = \pm ck - i\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$). Para $t > 0$, cerramos el contorno por el semiplano inferior y aplicamos el Teorema del Residuo:

$$\begin{aligned} I_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\underbrace{(\omega - ck + i\varepsilon)(\omega + ck + i\varepsilon)}_{f(\omega)}} \\ &= -i \sum \text{Res} f(\omega) \\ &= -i \left(\frac{e^{-ickt}}{2ck} - \frac{e^{ickt}}{2ck} \right) \\ &= -\frac{\sin(ckt)}{ck} \end{aligned}$$

Para $t < 0$, el contorno se cierra por el semiplano superior, donde no hay polos, por lo que $I_\omega = 0$, que es lo esperado respetando causalidad.

Sustituyendo este resultado en la integral espacial y pasando a coordenadas esféricas, donde $d^3 \vec{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$, $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \theta$ y $r = |\vec{r}|$:

$$G(t, \vec{r}) = -c^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{\sin(ckt)}{ck} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta e^{ikr \cos \theta} d\theta$$

La integración angular resulta en:

$$2\pi \int_{-1}^1 e^{ikru} du = 2\pi \left[\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \right] = 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr}$$

Reemplazando la parte angular en la integral principal y simplificando:

$$\begin{aligned} G(t, \vec{r}) &= -c^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{\sin(ckt)}{ck} \left(4\pi \frac{\sin(kr)}{kr} \right) \\ &= -\frac{c}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \sin(kr) \sin(ckt) dk \end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$, podemos reescribir el integrando:

$$G(t, \vec{r}) = -\frac{c}{4\pi^2 r} \int_0^\infty [\cos(k(r - ct)) - \cos(k(r + ct))] dk$$

Como el integrando es una función par respecto a k , podemos extender el límite de integración de $-\infty$ a ∞ dividiendo por la mitad, y expresar los cosenos como exponenciales complejas:

$$G(t, \vec{r}) = -\frac{c}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty [e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)}] dk$$

Recordando la representación integral de la función delta de Dirac, $\int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$:

$$G(t, \vec{r}) = -\frac{c}{8\pi^2 r} [2\pi\delta(r - ct) - 2\pi\delta(r + ct)]$$

Dado que estamos evaluando para $r > 0$ y $t > 0$, el término $r + ct$ es siempre positivo, por lo que $\delta(r + ct) = 0$. Así,

$$G(t, \vec{r}) = -\frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct).$$

Finalmente, reincorporando $\vec{r}'$ y t' , vemos que

$$G(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t'\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

□

Usando (5.4) y sustituyéndola en (5.3) vemos que

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) &= \frac{16\pi G}{c^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right) \\ &= \frac{4G}{c^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right). \end{aligned}$$

donde $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$. Estamos integrando sobre todo el espacio, sin embargo, $T_{\mu\nu} \neq 0$ únicamente en S_R . Así,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} d^3x' \frac{16\pi G}{c^4} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, \vec{r}'\right).$$

Estamos estudiando $\bar{h}_{\mu\nu}$ cuando $r \gg R$, luego, podemos aproximar $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r$, con $r = |\vec{r}|$. En efecto;

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r}} = r(1 + \mathcal{O}(r'/r)).$$

Así, podemos aproximar

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, r) = \frac{4G}{c^4 r} \int_{S_R} d^3x' T_{\mu\nu}(t - r/c, \vec{r}'). \quad (5.10)$$

Notemos que ahora $\bar{h}_{\mu\nu}$ depende de r , así, mientras más lejos estemos de la fuente, mejor será la aproximación mediante ondas planas en una vecindad de $\vec{r}$.

5.1. Cuadrupolo

Consideremos el **momento cuadrupolar** definido por

$$Q_{k\ell}(t) = \int_{S_R} d^3x \rho(t, \vec{r}) x_k x_\ell = \frac{1}{c^2} \int_{S_R} d^3x T_{00}(t, \vec{r}) x_k x_\ell. \quad (5.11)$$

Derivando respecto del tiempo,

$$\frac{d}{dt} Q_{k\ell}(t) = \frac{1}{c} \int_{S_R} d^3x \partial_0 T_{00}(t, \vec{r}) x_k x_\ell.$$

Recordemos que en las ecuaciones de campo son libres de divergencia como consecuencia de la identidad de Bianchi, es decir, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, esto impone que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. En la teoría linealizada, esta ley de conservación pasa a ser $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Usamos esta ley de conservación, escribiendola como $\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0$ para sustituirla en la expresión de la derivada del momento cuadrupolar:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q^{k\ell}(t) &= -\frac{1}{c} \int_{S_R} d^3x \partial_i T^{i0}(t, \vec{r}) x^k x^\ell \\ &= -\frac{1}{c} \int_{S_R} d^3x \left[\partial_i \left(T^{i0}(t, \vec{r}) x^k x^\ell \right) - T^{i0}(t, \vec{r}) (\delta_i^k x^\ell + \delta_i^\ell x^k) \right] \end{aligned}$$

Por teorema de Gauss,

$$\int_{S_R} d^3x \partial_i \left(T^{i0}(t, \vec{r}) x^k x^\ell \right) = \underbrace{\int_{\partial S_R} d^2x T^{i0}(t, \vec{r}) x^k x^\ell}_{=0, \text{ pues } T^{i0} = 0 \text{ en la frontera}} = 0.$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} Q^{k\ell}(t) = \frac{1}{c} \int_{S_R} d^3x \left(T^{k0}(t, \vec{r}) x^\ell + T^{\ell 0}(t, \vec{r}) x^k \right)$$

Derivando nuevamente y usando la conservación, llegamos a

$$\frac{d^2}{dt^2} Q^{k\ell}(t) = 2 \int_{S_R} d^3x T^{k\ell}(t, \vec{r}) \quad (5.12)$$

Por lo tanto, usando la ecuación (5.12) y (5.10), podemos relacionar la perturbación con el momento cuadrupolar:

$$\bar{h}^{k\ell}(t, r) = \frac{4G}{c^4 r} \int_{S_R} d^3x' T^{k\ell}(t - r/c, \vec{r}') = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} Q^{k\ell}(t - r/c)$$

Finalmente, obtenemos la fórmula cuadrupolar en la zona lejana:

$$\bar{h}_{k\ell}(t, r) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} Q_{k\ell}(t - r/c) \quad (5.13)$$

Esta expresión involucra explícitamente el momento cuadrupolar $Q_{k\ell}$ definido en (5.11). Surge naturalmente la pregunta: ¿por qué la radiación gravitacional está controlada por el cuadrupolo y no por otros momentos de la distribución de masa-energía? Para responder esto, debemos examinar si otros momentos multipolares podrían, en principio, sustituir a $Q_{k\ell}$ en la ecuación (5.13).

Monopolo

El momento monopolar representa la masa-energía total del sistema:

$$M(t) = \int d^3x \rho(t, \vec{x}) = \frac{1}{c^2} \int d^3x T_{00}(t, \vec{x}) \quad (5.14)$$

Para un sistema aislado, la conservación de la energía total implica:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Por consiguiente:

$$\frac{d^2M}{dt^2} = 0$$

Esto muestra que el monopolo no genera radiación. Este resultado tiene una interpretación geométrica mediante el teorema de Birkhoff que enunciaremos a continuación.

Teorema 5.1 (Birkhoff). Toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en vacío es localmente isométrica a la solución de Schwarzschild, la cual es por tanto única (salvo isometrías) y necesariamente estática.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [MTW73]. Este teorema nos indica que una fuente descrita únicamente por su monopolo (una estrella pulsante esféricamente simétrica, por ejemplo) genera un campo gravitacional exterior independiente del tiempo (métrica de Schwarzschild), y en consecuencia, el monopolo no puede generar ondas gravitacionales.

Ejemplo 5.1. Una estrella que pulsa radialmente, por ejemplo, $R(t) = R_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)$, mantiene simetría esférica en todo instante. Por Birkhoff, el espacio-tiempo exterior es la métrica de Schwarzschild estática. Luego, no hay emisión de ondas gravitacionales.

Dipolo

El momento dipolar está dado por:

$$D_i(t) = \int d^3x \frac{T_{00}(t, \vec{x})}{c^2} x_i = M X_i^{\text{CM}}(t). \quad (5.15)$$

donde $\vec{X}_{\text{CM}}$ es la posición del centro de masa. Para un sistema aislado (sin fuerzas externas), el momento lineal total está conservado:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{P} = \text{cte.}$$

Derivando una vez más:

$$\frac{d^2 D_i}{dt^2} = 0.$$

Por lo tanto, si intentáramos usar D_i en lugar de $Q_{k\ell}$, obtendríamos radiación nula.

Así, el monopolo $M(t)$ es constante para un sistema aislado y el dipolo $D_i(t)$ es, a lo más, lineal en el tiempo ($\ddot{D}_i = 0$). Por lo tanto, ninguno de estos momentos puede contribuir a la parte radiativa del campo en la zona lejana. En consecuencia, el primer multipolo que puede generar radiación gravitacional es el cuadrupolo. Sin embargo, la fórmula cuadrupolar (5.13) no está bajo el gauge TT, para hacerlo, primero quitamos la parte transversal:

$$\bar{h}_{k\ell}^{\text{T}} = P_k^i P_\ell^j \bar{h}_{ij}$$

donde P_k^i es el operador proyección, dado por $P_k^i = \delta_k^i - n_k n^i$, con $n = \vec{r}/r =: \hat{n}$.

Algunas propiedades del operador proyección, son:

- $P_{k\ell} = P_{\ell k}$,
- $P_k^i P_i^\ell = P_k^\ell$.

Así, $\bar{h}_{k\ell}^{\text{T}} = P_k^i P_\ell^j \bar{h}_{ij}$ garantiza que $n^i \bar{h}_{ij}^{\text{T}} = 0$.

En efecto,

$$n^i \bar{h}_{ij}^{\text{T}} = n^i (P_i^k P_j^\ell \bar{h}_{k\ell}) = n^i (\delta_i^k - n_i n^k) (\delta_j^\ell - n_j n^\ell) \bar{h}_{k\ell} = (n^k - n^k) (\delta_j^\ell - n_j n^\ell) \bar{h}_{k\ell} = 0.$$

Es decir, la onda no tiene polarizaciones en la dirección $\hat{n}$ (las polarizaciones viven en el plano perpendicular a $\hat{n}$).

Ahora, quitamos la traza:

$$\bar{h}_{k\ell}^{\text{TT}} = \bar{h}_{k\ell}^{\text{T}} - \frac{1}{2} P_{k\ell} (P^{ij} \bar{h}_{ij}^{\text{T}})$$

En efecto, $\bar{h}_{k\ell}^{\text{TT}}$ no tiene traza:

$$\begin{aligned}\delta^{k\ell}\bar{h}_{k\ell}^{\text{TT}} &= \delta^{k\ell}\left(\bar{h}_{k\ell}^{\text{T}} - \frac{1}{2}P_{k\ell}\left(P^{ij}\bar{h}_{ij}^{\text{T}}\right)\right) \\ &= \delta^{k\ell}\left(P_k^m P_\ell^n \bar{h}_{mn} - \frac{1}{2}P_{k\ell}P^{ij}P_i^m P_j^n \bar{h}_{mn}\right) \\ &= \delta_\ell^k\left(P_k^m P_\ell^n \bar{h}_{mn} - \frac{1}{2}P_{k\ell}P^{mn}\bar{h}_{mn}\right) \\ &= P^{mn}\bar{h}_{mn} - P^{mn}\bar{h}_{mn} = 0.\end{aligned}$$

Notemos que podemos escribir $\bar{h}_{k\ell}^{\text{TT}}$ como

$$\bar{h}_{k\ell}^{\text{TT}} = \left(P_k^i P_\ell^j - \frac{1}{2}P_{k\ell}P^{ij}\right)\bar{h}_{ij} \quad (5.16)$$

Ahora, podemos expresar la fórmula cuadrupolar (5.13) bajo el gauge TT:

$$\bar{h}_{k\ell}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \left(P_k^m P_\ell^n - \frac{1}{2}P_{k\ell}P^{mn}\right) \frac{d^2}{dt^2} Q_{mn} \quad (5.17)$$

5.2. Energía de una onda gravitacional

Si la onda gravitacional existe, entonces debe transportar energía. Esto es lo que estudiaremos ahora.

Una cosa curiosa es que la onda gravitacional es producto de la geometría del espacio-tiempo, en otras palabras, es fruto del lado izquierdo de la ecuación de campo de Einstein. Sin embargo, toda la energía, momento, densidad de materia, campos eléctricos, etc, se codifica en el tensor de energía momento, lado derecho de la ecuación de Einstein. Surge una especie de paradoja, si la onda gravitacional existe, entonces debería ser recogida por el lado derecho de la ecuación de campo, puesto que transporta energía, sin embargo, hemos visto que nace desde la geometría del espacio-tiempo. Einstein abordó esto, mediante el pseudo tensor de Einstein $t_{\mu\nu}$ que definiremos en esta sección.

Por simplicidad, en lugar de tomar la métrica (2.1), absorberemos el parámetro ε en la perturbación $h_{\mu\nu}$, de esta forma, la métrica a considerar es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Luego, expandimos el tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu}(\eta + h) = R_{\mu\nu}^{(1)}[h] + R_{\mu\nu}^{(2)}[h] + \dots,$$

Así mismo, el tensor de Einstein se escribe como

$$G_{\mu\nu}(\eta + h) = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)}[h] + G_{\mu\nu}^{(2)}[h] + \dots,$$

Escribimos la ecuación de campo, como $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Así,

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[h] + G_{\mu\nu}^{(2)}[h] + \dots = \kappa T_{\mu\nu}$$

Luego, $G_{\mu\nu}^{(1)} = \kappa(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$, donde $t_{\mu\nu}$ es el **pseudo tensor de energía momento** de Einstein, dado por

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa}(G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots) = -\frac{1}{\kappa}(G_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}^{(1)}) \quad (5.18)$$

Notemos que $t_{\mu\nu}$ no es un tensor, pues $G_{\mu\nu}^{(2)}$ no es un tensor, ya que involucra derivadas parciales, las cuales no transforman como tensor.

Notemos que $\partial^\mu(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \partial^\mu(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) &= \frac{1}{\kappa} \partial^\mu G_{\mu\nu}^{(1)} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \partial^\mu \left(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta ley de conservación nos indica que la energía en $T_{\mu\nu}$ puede ser convertida a $t_{\mu\nu}$, en otras palabras, la materia $T_{\mu\nu}$ pierde energía disipandose en forma de ondas gravitacionales. Para entender esta disipación, debemos calcular $G_{\mu\nu}^{(2)}$, que es el término líder de $t_{\mu\nu}$.

Usaremos que $g^{\mu\nu} = (\eta + h_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$. Con esto, obtenemos que

$$\begin{aligned} R_{\sigma\nu}^{(2)}[h] &= -\frac{1}{2} \partial_\mu (h^{\mu\alpha} (\partial_\nu h_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\sigma\nu})) + \frac{1}{2} \partial_\mu (h^{\mu\alpha} (\partial_\mu h_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu})) \\ &\quad + \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} (\partial_\mu h_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\lambda}) \eta^{\lambda\beta} (\partial_\nu h_{\beta\sigma} + \partial_\sigma h_{\beta\nu} - \partial_\beta h_{\nu\sigma}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} (\partial_\nu h_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\nu\lambda}) \eta^{\lambda\beta} (\partial_\mu h_{\beta\sigma} + \partial_\sigma h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu (h^{\mu\alpha} (\partial_\nu h_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\sigma\nu})) + \frac{1}{2} \partial_\mu (h^{\mu\alpha} (\partial_\sigma h_{\alpha\mu})) \\ &\quad + \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} (\partial_\lambda h_{\alpha\mu}) \eta^{\lambda\beta} (\partial_\nu h_{\beta\sigma} + \partial_\sigma h_{\beta\nu} - \partial_\beta h_{\nu\sigma}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} (\partial_\nu h_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\nu\lambda}) \eta^{\lambda\beta} (\partial_\mu h_{\beta\sigma} + \partial_\sigma h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\sigma}) \end{aligned}$$

Recordemos que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$. Así, tenemos que

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(2)} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(1)} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(1)} \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu}$$

Calcularemos primero

$$t_{0j} = -\frac{1}{\kappa} G_{0j}^{(2)}[h],$$

que es la densidad de corriente de energía de la onda. Para construir $G_{0j}^{(2)}$ usaremos el campo lineal en gauge TT,

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x) = \text{Re}\{A_{ij}e^{ik_\alpha x^\alpha}\}, \quad k^\alpha k_\alpha = 0, \quad k^\mu A_{\mu\nu} = 0, \quad A^\mu{}_\mu = 0, \quad h_{0\nu}^{\text{TT}} = 0.$$

Notemos que el único termino que sobrevive de $G_{0j}^{(2)}$ es $R_{0j}^{(2)}$, puesto que los otros se multiplican por la métrica de Minkowski, que no tiene componentes mixtas ($\eta_{0j} = \eta^{0j} = 0$). Así, $G_{0j}^{(2)}[h^{\text{TT}}] = R_{0j}^{(2)}[h^{\text{TT}}]$. Esto es,

$$\begin{aligned} R_{0j}^{(2)}[h^{\text{TT}}] &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha \left[h^{\text{TT} \alpha \beta} (\partial_j h_{\beta 0}^{\text{TT}} + \partial_0 h_{\beta j}^{\text{TT}} - \partial_\beta h_{0j}^{\text{TT}}) \right] + \frac{1}{2} \partial_j \left[h^{\text{TT} \alpha \beta} (\partial_0 h_{\alpha \beta}^{\text{TT}}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \eta^{\alpha \beta} (\partial_\lambda h_{\alpha \beta}^{\text{TT}}) \eta^{\lambda \delta} (\partial_j h_{\delta 0}^{\text{TT}} + \partial_0 h_{\delta 0}^{\text{TT}} - \partial_\delta h_{j 0}^{\text{TT}}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta^{\alpha \beta} (\partial_j h_{\beta \lambda}^{\text{TT}} + \partial_\lambda h_{\beta j}^{\text{TT}} - \partial_\beta h_{j \lambda}^{\text{TT}}) \eta^{\lambda \delta} (\partial_\alpha h_{\delta 0}^{\text{TT}} + \partial_0 h_{\delta \alpha}^{\text{TT}} - \partial_\delta h_{\alpha 0}^{\text{TT}}). \end{aligned}$$

Imponiendo la condición de gauge $h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0$, la expresión nos queda,

$$\begin{aligned} R_{0j}^{(2)}[h^{\text{TT}}] &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha \left[h^{\text{TT} \alpha \beta} (\partial_0 h_{\beta j}^{\text{TT}}) \right] + \frac{1}{2} \partial_j \left[h^{\text{TT} \alpha \beta} (\partial_0 h_{\alpha \beta}^{\text{TT}}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \underbrace{\eta^{\alpha \beta} (\partial_\lambda h_{\alpha \beta}^{\text{TT}})}_{=0} \eta^{\lambda \delta} (\partial_0 h_{\delta 0}^{\text{TT}}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta^{\alpha \beta} (\partial_j h_{\beta \lambda}^{\text{TT}} + \partial_\lambda h_{\beta j}^{\text{TT}} - \partial_\beta h_{j \lambda}^{\text{TT}}) \eta^{\lambda \delta} (\partial_0 h_{\delta \alpha}^{\text{TT}}) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha (h^{\text{TT} \alpha \beta} \partial_0 h_{\beta j}^{\text{TT}}) + \frac{1}{2} \partial_\alpha (h^{\text{TT} \alpha \beta} \partial_0 h_{\alpha \beta}^{\text{TT}}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \partial_0 h^{\text{TT} \lambda \beta} (\partial_j h_{\beta \lambda}^{\text{TT}} + \partial_\lambda h_{\beta j}^{\text{TT}} - \partial_\beta h_{j \lambda}^{\text{TT}}) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha (h^{\text{TT} \alpha \beta} \partial_0 h_{\beta j}^{\text{TT}}) + \frac{1}{2} \partial_\alpha (h^{\text{TT} \alpha \beta} \partial_0 h_{\alpha \beta}^{\text{TT}}) - \frac{1}{4} \partial_0 h^{\text{TT} \lambda \beta} \partial_j h_{\beta \lambda}^{\text{TT}} \end{aligned}$$

Expandiendo con la derivada del producto y simplificando términos, obtenemos que

$$R_{0j}^{(2)}[h^{\text{TT}}] = \frac{1}{2} h^{\text{TT} \alpha \beta} \partial_j \partial_0 h_{\alpha \beta}^{\text{TT}} + \frac{1}{4} \partial_0 h^{\text{TT} \alpha \beta} \partial_j h_{\alpha \beta}^{\text{TT}}$$

Tomamos $h_{k\ell}^{\text{TT}} = \text{Re}\{A_{k\ell}e^{ik_\sigma x^\sigma}\}$. Así:

$$R_{0j}^{(2)} = \frac{1}{2} \text{Re}\{A^{k\ell}e^{ik_\sigma x^\sigma}\} \text{Re}\{-A_{k\ell}k_0k_j e^{ik_\sigma x^\sigma}\} + \frac{1}{4} \text{Re}\{A^{k\ell}ik_0e^{ik_\sigma x^\sigma}\} \text{Re}\{A_{k\ell}ik_j e^{ik_\sigma x^\sigma}\}$$

Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $\text{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ y $\text{Re}(iz) = (iz - i\bar{z})/2$. Así,

$$\begin{aligned} R_{0j}^{(2)} &= -\frac{k_0k_j}{8} (A^{k\ell}e^{ik_\sigma x^\sigma} + \bar{A}^{k\ell}e^{-ik_\sigma x^\sigma}) (A_{k\ell}e^{ik_\sigma x^\sigma} + \bar{A}_{k\ell}e^{-ik_\sigma x^\sigma}) \\ &\quad + \frac{k_0k_j}{16} (A^{k\ell}ie^{ik_\sigma x^\sigma} - \bar{A}^{k\ell}ie^{-ik_\sigma x^\sigma}) (A_{k\ell}ie^{ik_\sigma x^\sigma} - \bar{A}_{k\ell}ie^{-ik_\sigma x^\sigma}) \\ &= -\frac{3}{8}k_0k_j (A^{k\ell}A_{k\ell}e^{2ik_\sigma x^\sigma} + \bar{A}^{k\ell}\bar{A}_{k\ell}e^{-2ik_\sigma x^\sigma}) - \frac{k_0k_j}{8}A^{k\ell}\bar{A}_{k\ell} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\kappa t_{0j} = -G_{0j}^{(2)} = \frac{3}{8}k_0k_j \left(A^{k\ell} A_{k\ell} e^{2ik_\sigma x^\sigma} + \bar{A}^{k\ell} \bar{A}_{k\ell} e^{-2ik_\sigma x^\sigma} \right) + \frac{k_0k_j}{8} A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell}$$

Notemos que el primer término de κt_{0j} oscila en el tiempo periódicamente, por lo que si sacamos el promedio temporal $\langle \cdot \rangle$, nos queda:

$$\kappa \langle t_{0j} \rangle = \frac{k_0k_j}{8} A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell}$$

Definimos $s_j = -t_{\alpha j} u^\alpha$, que es el **vector de flujo de energía** que mide el observador (análogo al vector de Poynting en electromagnetismo). Para el observador en reposo en el laboratorio, tenemos que $u^\alpha = (c, 0, 0, 0)$. Así, $s_j = -ct_{0j}$. Luego, el promedio temporal de s_j , es $\langle s_j \rangle = -c \langle t_{0j} \rangle$. Por lo tanto,

$$\kappa \langle s_j \rangle = \frac{\omega^2}{8c} n_j A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell}$$

En efecto. Tenemos que $k_\alpha k^\alpha = 0$, es decir, $-(k^0)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2 = 0$. La dirección de propagación de la onda es $\hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$. Luego, $k_j = (\omega/c)n_j$ (y $k_0 = -\omega/c$). Así,

$$\kappa \langle t_{0j} \rangle = \frac{k_0k_j}{8} A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell} = -\frac{\omega^2}{8c^2} n_j A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell}$$

Por lo tanto, $\kappa \langle s_j \rangle = -\kappa c \langle t_{0j} \rangle = \frac{\omega^2}{8c} n_j A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell}$.

Podemos expresar $\langle s_j \rangle$ como

$$\langle s_j \rangle = \frac{cn_j}{4\kappa} \langle \partial_0 h^{\text{TT } k\ell} \partial_0 h_{k\ell}^{\text{TT}} \rangle \quad (5.19)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \partial_0 h^{\text{TT } k\ell} \partial_0 h_{k\ell}^{\text{TT}} \rangle &= \langle \text{Re} \{ A^{k\ell} i k_0 e^{ik_\rho x^\rho} \} \text{Re} \{ A_{k\ell} i k_0 e^{ik_\sigma x^\sigma} \} \rangle \\ &= \frac{k_0^2}{4} \langle (A^{k\ell} i e^{ik_\rho x^\rho} - \bar{A}^{k\ell} i e^{-ik_\rho x^\rho}) (A_{k\ell} i e^{ik_\sigma x^\sigma} - \bar{A}_{k\ell} i e^{-ik_\sigma x^\sigma}) \rangle \\ &= \frac{k_0^2}{2} A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell} = \frac{\omega^2}{2c^2} A^{k\ell} \bar{A}_{k\ell} \end{aligned}$$

Así,

$$\langle s_j \rangle = \frac{\omega^2 n_j}{8c\kappa} \left(\frac{2c^2}{\omega^2} \langle \partial_0 h^{\text{TT } k\ell} \partial_0 h_{k\ell}^{\text{TT}} \rangle \right) = \frac{cn_j}{4\kappa} \langle \partial_0 h^{\text{TT } k\ell} \partial_0 h_{k\ell}^{\text{TT}} \rangle.$$

Usando la expresión (5.16) y derivando, vemos que

$$\partial_0 h^{\text{TT} k\ell} \partial_0 h_{k\ell}^{\text{TT}} = \left(P^{ri} P^{sj} - \frac{1}{2} P^{ij} P^{rs} \right) \partial_0 \bar{h}_{ij} \partial_0 \bar{h}_{rs}$$

Por lo tanto, el promedio temporal del flujo de energía (5.19) se escribe como

$$\langle s_j \rangle = \frac{cn_j}{4\kappa} \left(P^{mr} P^{ns} - \frac{1}{2} P^{mn} P^{rs} \right) \langle \partial_0 \bar{h}_{mn} \partial_0 \bar{h}_{rs} \rangle$$

Derivamos $\bar{h}_{mn}$ con respecto a $x^0 = ct$ (ver (5.13)) y vemos que

$$\partial_0 \bar{h}_{mn} = \frac{\kappa}{4\pi r c} \frac{d^3}{dt^3} Q_{mn}(t - r/c)$$

Por otro lado, recordando que el operador proyección se define como $P^{mr} = \delta^{mr} - n^m n^r$, es fácil ver que

$$P^{mr} P^{ns} - \frac{1}{2} P^{mn} P^{rs} = \delta^{mr} \delta^{ns} - \frac{\delta^{mn} \delta^{rs}}{2} - 2\delta^{mr} n^n n^s + \delta^{mn} n^r n^s + \frac{n^m n^n n^r n^s}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle s_j \rangle = & \\ \frac{\kappa n_j}{64\pi^2 r^2 c} \left(\delta^{mr} \delta^{ns} - \frac{\delta^{mn} \delta^{rs}}{2} - 2\delta^{mr} n^n n^s + \delta^{mn} n^r n^s + \frac{n^m n^n n^r n^s}{2} \right) \left\langle \frac{d^3 Q_{mn}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{rs}}{dt^3} \right\rangle & \end{aligned} \quad (5.20)$$

Nos interesa saber la cantidad de energía irradiada por la onda gravitacional. Definimos la potencia radiada como el flujo total que atraviesa una esfera grande S_r de radio $r \gg R$:

$$P(t, r) = r^2 \int_{S_r} \langle s_j \rangle n^j d\Omega, \quad (5.21)$$

donde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Para calcular la integral (5.21) nos son útiles las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} n^i n^j d\Omega &= \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}, \\ \int_{\mathbb{S}^2} n^i n^j n^k n^\ell d\Omega &= \frac{4\pi}{15} \left(\delta^{ij} \delta^{k\ell} + \delta^{ik} \delta^{j\ell} + \delta^{i\ell} \delta^{jk} \right). \end{aligned}$$

La demostración de ellas se encuentra en el apéndice. Usando estas identidades para resolver la integral de (5.21) y notando que $\int_{S_r} \delta^{ij} d\Omega = \delta^{ij} 4\pi$ y $n_j n^j = 1$, obtenemos que

$$P = \frac{4\pi\kappa}{64\pi^2 c} \left(\delta^{mr} \delta^{ns} - \frac{\delta^{mn} \delta^{rs}}{2} - \frac{2\delta^{mr} \delta^{ns}}{3} + \frac{\delta^{mn} \delta^{rs}}{3} + \frac{\delta^{mn} \delta^{rs} + \delta^{mr} \delta^{ns} + \delta^{ms} \delta^{rn}}{30} \right) \left\langle \frac{d^3 Q_{mn}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{rs}}{dt^3} \right\rangle$$

Simplificando, vemos que

$$P(t, r) = \frac{\kappa}{16\pi c} \left(\frac{11}{30} \delta^{mr} \delta^{ns} + \frac{1}{30} \delta^{ms} \delta^{rn} - \frac{2}{15} \delta^{mn} \delta^{rs} \right) \left\langle \frac{d^3 Q_{mn}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{rs}}{dt^3} \right\rangle (t - r/c)$$

Claramente, $\delta^{mr}\delta^{ns} \neq \delta^{ms}\delta^{rn}$, sin embargo, si contraemos con la tercera derivada del momento cuadrupolar, que denotamos como $\ddot{\ddot{Q}}_{rs}$, vemos que

$$\delta^{mr}\delta^{ns}\ddot{\ddot{Q}}_{rs} = \ddot{\ddot{Q}}^{mn} = \ddot{\ddot{Q}}^{nm} = \delta^{ms}\delta^{rn}\ddot{\ddot{Q}}_{rs}, \quad (5.22)$$

por lo que, en este caso, podemos tratar,

Como $\ddot{\ddot{Q}}_{mn} = \ddot{\ddot{Q}}_{nm}$, al contraer se tiene

$$\delta^{ms}\delta^{rn}\ddot{\ddot{Q}}_{mn}\ddot{\ddot{Q}}_{rs} = \ddot{\ddot{Q}}_{mn}\ddot{\ddot{Q}}^{nm} = \ddot{\ddot{Q}}_{mn}\ddot{\ddot{Q}}^{mn} = \delta^{mr}\delta^{ns}\ddot{\ddot{Q}}_{mn}\ddot{\ddot{Q}}_{rs}.$$

Así, simplificando, la ecuación (5.22) nos queda como

$$\begin{aligned} P(t, r) &= \frac{\kappa}{16\pi c} \left\langle \frac{11}{30} \ddot{\ddot{Q}}_{mn} \ddot{\ddot{Q}}^{mn} + \frac{1}{30} \ddot{\ddot{Q}}_{mn} \ddot{\ddot{Q}}^{mn} - \frac{2}{15} \ddot{\ddot{Q}}^n{}_n \ddot{\ddot{Q}}^s{}_s \right\rangle (t - r/c) \\ &= \frac{\kappa}{40\pi c} \left\langle \ddot{\ddot{Q}}_{mn} \ddot{\ddot{Q}}^{mn} - \frac{1}{3} \ddot{\ddot{Q}}^n{}_n \ddot{\ddot{Q}}^s{}_s \right\rangle (t - r/c) \end{aligned}$$

Si usamos el **momento cuadrupolar reducido**

$$\mathbb{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} Q^k{}_k, \quad (5.23)$$

es fácil ver que la ecuación de la potencia se reduce a

$$P(t, r) = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{\ddot{Q}}_{mn} \ddot{\ddot{Q}}^{mn} \right\rangle (t - r/c) \quad (5.24)$$

La ecuación (5.24) se conoce como **fórmula cuadrupolar de Einstein**.

Capítulo 6

Aplicación a un Sistema Binario

En este capítulo aplicaremos el formalismo desarrollado a lo largo de la tesis al caso concreto de un sistema binario de estrellas no relativista. En los cálculos se asumirá que estamos trabajando en órbita circular, a no ser que se especifique lo contrario.

6.1. Radiación gravitacional en sistemas binarios

Consideramos dos masas m_1 y m_2 en órbita circular no relativista (las velocidades orbitales son mucho menores que la velocidad de la luz), separadas por una distancia a . Asumimos que el sistema está aislado. En coordenadas cartesianas, con el plano de la órbita en el plano xy , las posiciones de las masas son:

$$\vec{r}_1(t) = \left(\frac{m_2}{M} a \cos(\omega t), \frac{m_2}{M} a \sin(\omega t), 0 \right), \quad (6.1a)$$

$$\vec{r}_2(t) = \left(-\frac{m_1}{M} a \cos(\omega t), -\frac{m_1}{M} a \sin(\omega t), 0 \right), \quad (6.1b)$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total y ω la frecuencia angular orbital. Por la tercera ley de Kepler, sabemos que la frecuencia debe satisfacer:

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (6.2)$$

Momento cuadrupolar

En la sección anterior definimos el momento cuadrupolar como

$$Q_{k\ell}(t) = \frac{1}{c^2} \int_{S_R} d^3x T_{00}(t, \vec{r}) x_k x_\ell,$$

donde S_R denota la región espacial (volumen) de integración, y T_{00} es la componente tiempo-tiempo del tensor energía-momento. En el límite no relativista, $T_{00} \approx \rho c^2$, con ρ la densidad de masa. Por lo tanto, para un sistema de partículas puntuales (de dos partículas):

$$Q_{k\ell}(t) = \sum_{j=1}^2 m_j x_k^{(j)}(t) x_\ell^{(j)}(t). \quad (6.3)$$

Sustituyendo las posiciones, obtenemos:

$$Q_{xx}(t) = \mu a^2 \cos^2(\omega t), \quad (6.4a)$$

$$Q_{yy}(t) = \mu a^2 \sin^2(\omega t), \quad (6.4b)$$

$$Q_{xy}(t) = Q_{yx}(t) = \mu a^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t), \quad (6.4c)$$

$$Q_{zz}(t) = 0, \quad (6.4d)$$

donde $\mu = m_1 m_2 / M$ es la masa reducida. Los demás componentes son nulos.

La traza es

$$Q = Q_{kk} = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = \mu a^2, \quad (6.5)$$

y el momento cuadrupolar reducido (libre de traza) definido en la sección anterior es $\mathbb{Q}_{k\ell} = Q_{k\ell} - \frac{1}{3} \delta_{k\ell} Q$, de modo que:

$$\mathbb{Q}_{xx} = \mu a^2 \left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right), \quad (6.6a)$$

$$\mathbb{Q}_{yy} = \mu a^2 \left(\sin^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right), \quad (6.6b)$$

$$\mathbb{Q}_{xy} = \mathbb{Q}_{yx} = \mu a^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t), \quad (6.6c)$$

$$\mathbb{Q}_{zz} = -\frac{1}{3} \mu a^2. \quad (6.6d)$$

Amplitud de la onda gravitacional

Calculamos primero la segunda derivada temporal:

$$\ddot{Q}_{xx} = -2\mu a^2 \omega^2 \cos(2\omega t), \quad (6.7a)$$

$$\ddot{Q}_{yy} = 2\mu a^2 \omega^2 \cos(2\omega t), \quad (6.7b)$$

$$\ddot{Q}_{xy} = \ddot{Q}_{yx} = -2\mu a^2 \omega^2 \sin(2\omega t), \quad (6.7c)$$

$$\ddot{Q}_{zz} = 0. \quad (6.7d)$$

Notemos que, para una órbita circular, la traza $Q = \mu a^2$ es constante, por lo tanto $\ddot{\mathbb{Q}}_{k\ell} = \ddot{Q}_{k\ell}$.

Sustituyendo (6.7) en (5.13), vemos que

$$\bar{h}_{ij}(t, r) = -\frac{4G}{c^4 r} \mu a^2 \omega^2 \begin{pmatrix} \cos(2\omega t_{\text{ret}}) & \sin(2\omega t_{\text{ret}}) & 0 \\ \sin(2\omega t_{\text{ret}}) & -\cos(2\omega t_{\text{ret}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Para obtener la expresión en el gauge TT, proyectamos en la dirección de propagación $\hat{n}$. En el caso particular en que la onda viaja en la dirección $\hat{z}$ (perpendicular al plano orbital), la proyección es trivial y obtenemos la misma matriz para $\bar{h}_{ij}^{\text{TT}}$. Identificamos las dos polarizaciones independientes:

$$h_+(t, r) = -\frac{4G}{c^4 r} \mu a^2 \omega^2 \cos(2\omega t_{\text{ret}}), \quad (6.9a)$$

$$h_\times(t, r) = -\frac{4G}{c^4 r} \mu a^2 \omega^2 \sin(2\omega t_{\text{ret}}). \quad (6.9b)$$

La frecuencia de la onda gravitacional es el doble de la frecuencia orbital: $\omega_{\text{GW}} = 2\omega$.

Potencia radiada

Ahora usaremos la fórmula (5.24) para calcular la potencia radiada por la onda gravitacional. Calculamos las terceras derivadas del cuadrupolo:

$$\ddot{\ddot{Q}}_{xx} = 4\mu a^2 \omega^3 \sin(2\omega t), \quad (6.10a)$$

$$\ddot{\ddot{Q}}_{yy} = -4\mu a^2 \omega^3 \sin(2\omega t), \quad (6.10b)$$

$$\ddot{\ddot{Q}}_{xy} = \ddot{\ddot{Q}}_{yx} = -4\mu a^2 \omega^3 \cos(2\omega t). \quad (6.10c)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{Q}}_{ij} \ddot{\ddot{Q}}^{ij} &= 2 \left[(\ddot{\ddot{Q}}_{xx})^2 + (\ddot{\ddot{Q}}_{xy})^2 \right] \\ &= 32 \mu^2 a^4 \omega^6 \left(\sin^2(2\omega t) + \cos^2(2\omega t) \right) \\ &= 32 \mu^2 a^4 \omega^6, \end{aligned}$$

que es constante en el tiempo, por lo que su promedio temporal coincide con el mismo valor:

$$\langle \ddot{\ddot{Q}}_{ij} \ddot{\ddot{Q}}^{ij} \rangle = 32 \mu^2 a^4 \omega^6. \quad (6.11)$$

Sustituyendo (6.11) en (5.24), vemos que

$$P = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a^4 \omega^6.$$

Finalmente, usando $\omega^2 = GM/a^3$:

$$\boxed{P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5}.} \quad (6.12)$$

Esta es la **fórmula de Peters y Mathews** [PM63], aplicada a un sistema binario de órbita circular. La fórmula original (6.13), mostrada abajo, involucra correcciones debido a la excentricidad de la órbita:

$$P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} f(e) \quad (6.13)$$

donde

$$f(e) = \left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right] (1 - e^2)^{-7/2}$$

es la función de corrección.

6.2. Consecuencias Físicas

La emisión de ondas gravitacionales conlleva a una pérdida de energía del sistema que se extrae de la energía orbital newtoniana $E_{\text{orb}} = -GM\mu/(2a)$. La conservación de la energía exige que la tasa de cambio de la energía orbital sea igual a menos la potencia radiada,

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -P_{\text{GW}}. \quad (6.14)$$

Derivando la energía orbital (E_{orb}) respecto al tiempo e igualando a la potencia radiada (6.12), obtenemos la tasa de contracción del radio orbital $\dot{a}$:

$$\dot{a} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3}. \quad (6.15)$$

El signo negativo indica que la órbita se contrae en el tiempo. Si diferenciamos la tercera ley de Kepler (6.2), con $\omega = 2\pi/T$ donde T es el periodo orbital, vemos que

$$2\frac{\dot{T}}{T} = 3\frac{\dot{a}}{a}. \quad (6.16)$$

Como $\dot{a} < 0$, concluimos de la ecuación (6.16) que el periodo debe disminuir y por lo tanto, la frecuencia de las ondas gravitacionales del sistema, aumenta ($T = 1/f$). Sustituimos (6.15) en (6.16):

$$\dot{T} = \frac{3}{2}T \left(-\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} \right) = -\frac{96}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5} \frac{T}{a^4} \quad (6.17)$$

Usando la tercera ley de Kepler vemos que $a = (GM)^{1/3}(T/2\pi)^{2/3}$, luego tenemos que $T/a^4 = (2\pi)^{8/3}(GM)^{-4/3}T^{-5/3}$. Así, podemos expresar la ecuación (6.17) como:

$$\dot{T} = -\frac{96}{5}(2\pi)^{8/3} \left(\frac{G}{c^3} \right)^{5/3} \mu M^{2/3} T^{-5/3} \quad (6.18)$$

En la ecuación anterior, la evolución temporal depende de las masas únicamente a través de la combinación $\mu M^{2/3}$. Esto motiva la definición de un nuevo parámetro, la **Masa Chirp** (M_c):

$$M_c \equiv \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (6.19)$$

Elevando a la potencia 5/3, vemos que $M_c^{5/3} = \mu M^{2/3}$. Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación (6.17) como

$$\dot{T} = -\frac{96}{5}(2\pi)^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} T^{-5/3}. \quad (6.20)$$

Como vimos en las polarizaciones (6.9), la frecuencia de la onda gravitacional es el doble que la frecuencia del periodo orbital ($f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}}$), por lo tanto

el periodo (orbital) es $T = 2/f_{\text{GW}}$. Con la ecuación (6.20) y notando que $\dot{T} = -2\dot{f}_{\text{GW}}/f_{\text{GW}}^2$, podemos calcular la derivada temporal de la frecuencia de las ondas gravitacionales:

$$\dot{f}_{\text{GW}} = \frac{96}{5}\pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3} \quad (6.21)$$

Las expresiones en (6.9) se han obtenido suponiendo una órbita circular con parámetros orbitales constantes ($a = \text{cte}$, $\omega = \text{cte}$), de modo que la amplitud $A = \frac{4G}{c^4 r} \mu a^2 \omega^2$ permanece fija. Sin embargo, hemos visto que la emisión de ondas gravitacionales produce una pérdida de energía en el sistema binario, el radio orbital $a(t)$ disminuye y la frecuencia orbital $\omega(t)$ aumenta. En consecuencia, la señal debe entenderse como una onda cuasi-monocromática con amplitud y fase que varían en escalas de tiempo mucho mayores que el período orbital [Mag08].

Integrando la ecuación (6.15), podemos ver que

$$a^4(t) = a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{\mu M^2 G^3}{c^5} t,$$

donde $a_0 = a_{\text{hoy}}$. Podemos escribir esta ecuación de forma compacta, como

$$a(t) = a_0 (1 - t/t_c)^{1/4}, \quad (6.22)$$

donde

$$t_c = \frac{5}{256} \frac{c^5 a_0^4}{G^3 \mu M^2} \quad (6.23)$$

En ausencia de fuerzas no gravitacionales adicionales, la pérdida de energía por radiación gravitacional hace que las dos componentes del sistema binario terminen acercándose y fusionándose en un tiempo t_c (tiempo de coalescencia). En órbitas elípticas, la emisión de ondas gravitacionales es más intensa cuando el sistema pasa por el periastro [MTW73]. Esto conduce a una disminución progresiva de la excentricidad de la órbita y en consecuencia, tiende a circularizarse a medida que avanza el movimiento en inspiral de los cuerpos [PM63].

En la ecuación (6.17) vimos que el periodo disminuye en el tiempo. Si ahora usamos la ecuación (6.22) junto con la tercera ley de Kepler, vemos que el periodo depende del tiempo como

$$T(t) = \frac{2\pi a(t)^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi a_0^{3/2}}{\sqrt{GM}} \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{3/8}. \quad (6.24)$$

Derivando respecto del tiempo,

$$\dot{T}(t) = -\frac{3\pi a_0^{3/2}}{4\sqrt{GM} t_c} \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{-5/8}. \quad (6.25)$$

La figura 6.1 presenta la gráfica de la ecuación (6.25)

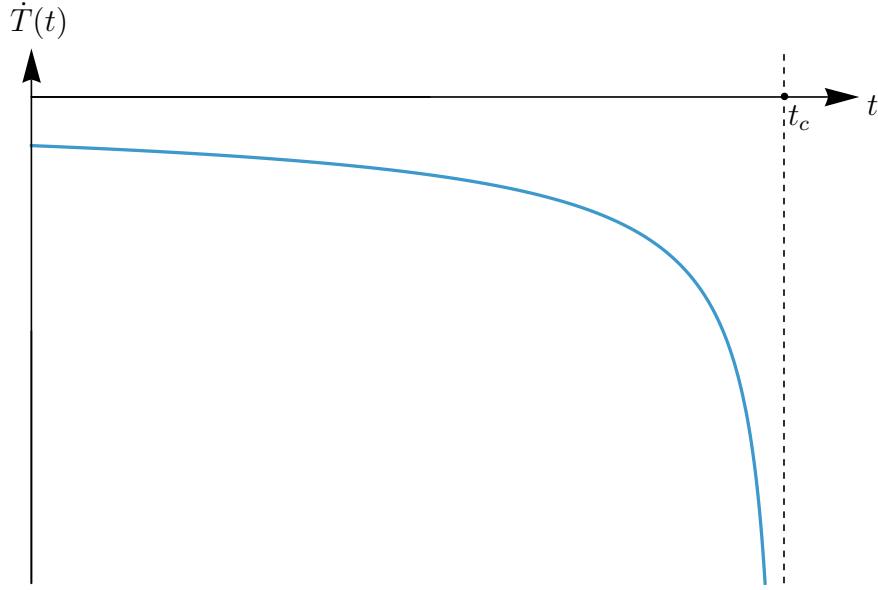


Fig. 6.1: Gráfico $\dot{T}(t)$ v/s t

Usando la tercera ley de Kepler (6.2) y la ecuación (6.22), podemos ver que la amplitud de la onda de las polarizaciones (6.9) como función del tiempo es

$$A(t) = \frac{4G}{c^4 r} \mu a(t)^2 \frac{GM}{a(t)^3} = \frac{4G^2 \mu M}{a_0 c^4 r} \frac{1}{(1 - t/t_c)^{1/4}}$$

Así, podemos escribir las polarizaciones (6.9), como

$$h_+(t, r) = -h_0 (1 - t/t_c)^{-1/4} \cos\left(\beta (1 - t/t_c)^{-3/8} (t - r/c)\right), \quad (6.26a)$$

$$h_\times(t, r) = -h_0 (1 - t/t_c)^{-1/4} \sin\left(\beta (1 - t/t_c)^{-3/8} (t - r/c)\right). \quad (6.26b)$$

donde

$$h_0 = \frac{4G^2 \mu M}{a_0 c^4 r} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2\sqrt{GM}}{a_0^{3/2}}$$

Para tener una idea de cómo se comportan en el tiempo las polarizaciones (6.26) las graficaremos tomando como modelo

$$h(t) = -h_0 (1 - t/t_c)^{-1/4} \cos\left(\beta (1 - t/t_c)^{-3/8} (t - r/c) + \psi\right), \quad (6.27)$$

La Figura 6.2 muestra el comportamiento de la ecuación (6.27) en el tiempo, en el que a medida que evoluciona el sistema, tanto la amplitud como la frecuencia de la onda crecen lentamente. En este modelo simplificado, la amplitud $h(t)$ diverge en $t = t_c$. Esta divergencia no es física; nos indica que la aproximación empleada (no relativista, es decir, velocidades bajas y campo gravitatorio débil) deja de ser aplicable cerca de la coalescencia. En un tratamiento completo que

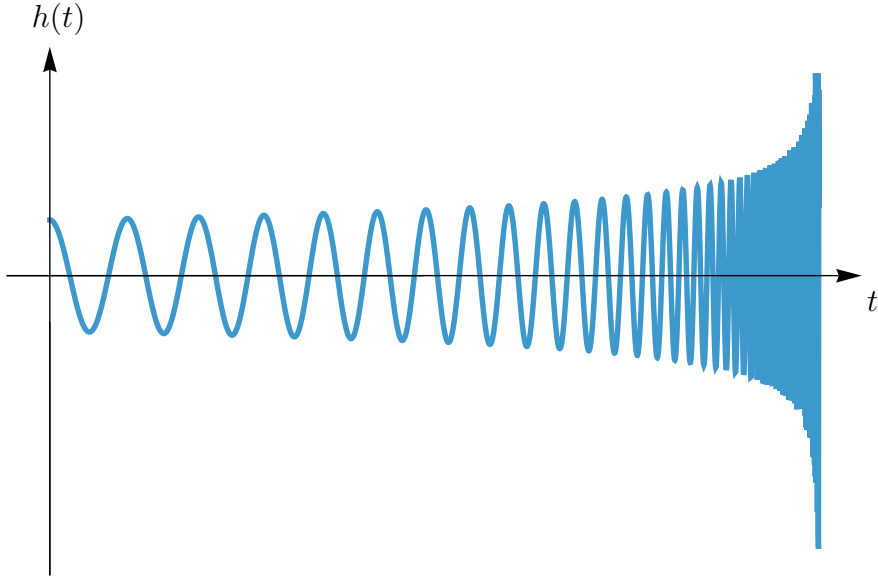


Fig. 6.2: Señal $h(t)$.

incluya correcciones relativistas de orden superior, efectos de spin y deformaciones de marea, la señal presenta tres fases características: (i) un inspiral donde la amplitud y frecuencia aumentan suavemente (como se ve en 6.2), (ii) una coalescencia donde la amplitud alcanza un máximo (finito), y (iii) un *ring-down* donde la señal decae exponencialmente, consecuencia de la estabilización del sistema en el objeto compacto remanente [Per17]. Esta secuencia fue observada en la primera detección de LIGO el 14 de septiembre de 2015 [A⁺16] y se ilustra en la figura 6.3

La Figura 6.3 muestra la señal de onda gravitacional GW150914, correspondiente a la coalescencia de un sistema binario de agujeros negros. La señal observada presenta claramente las tres fases características de una coalescencia binaria mencionada en el párrafo anterior: inspiral, coalescencia y *ring-down*. En particular, la evolución temporal de la frecuencia de la señal permitió estimar la masa chirp del sistema. Usando (6.19) y (6.21) se puede ver que

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5},$$

donde se calculó que, aproximadamente, $M_c \approx 30M_\odot$, implicando que la masa del sistema es de a lo menos 70 masas solares. Permitiendo concluir que la señal detectada se originó por la fusión de dos agujeros negros [A⁺16].

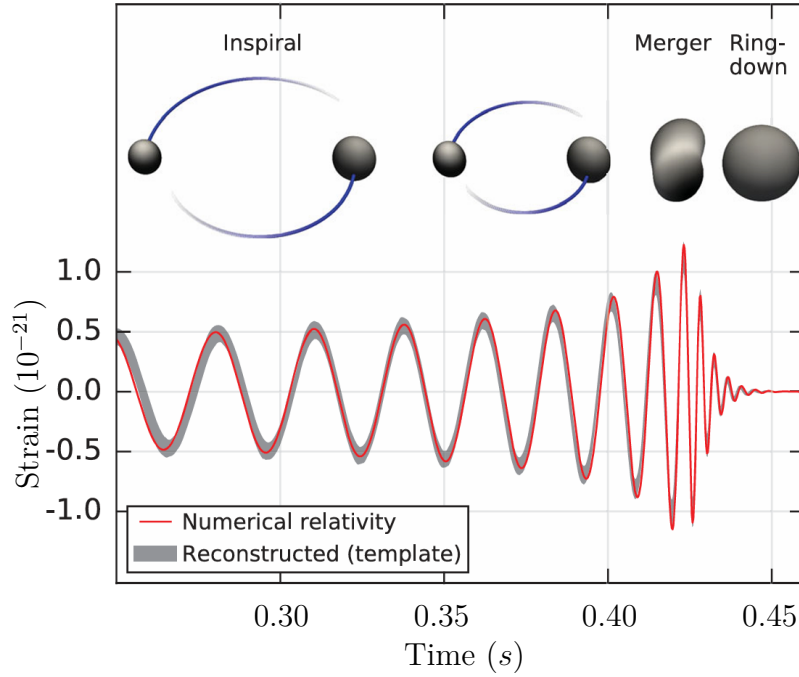


Fig. 6.3: *Fuente:* [A⁺16].

6.3. Detección de Ondas Gravitacionales

6.3.1. Detección Indirecta

La primera prueba de la existencia de ondas gravitacionales se debió al análisis del púlsar binario PSR B1913+16, descubierto por Russell Hulse y Joseph Taylor en 1974 [HT75]. Este sistema binario permitió comprobar la existencia de las ondas gravitacionales de manera indirecta. Con los datos de las masas del sistema y los elementos de la órbita, Taylor y Weisberg [TW82] comprobaron que el sistema perdía energía de acuerdo con lo predicho por la relatividad general. En particular, el período orbital no permanece constante, sino que disminuye lentamente en el tiempo. En el marco simplificado desarrollado en este capítulo, la ecuación (6.25) representa este comportamiento en el caso circular y permite capturar cualitativamente la tendencia general esperada.

En las Figuras 6.4 y 6.5 se ilustra la evidencia observacional del decaimiento orbital del púlsar binario PSR B1913+16 debido a la emisión de radiación gravitacional. En ambos casos, lo que se grafica no es directamente $\dot{T}(t)$, sino un residuo de fase/tiempo orbital, construido comparando los tiempos observados de pasaje por el periastro con los tiempos que se obtendrían si el período orbital permaneciera constante. Si $T(t)$ decrece lentamente, como predice la relatividad general, entonces el desfase temporal se acumula a lo largo de muchas órbitas (el periodo orbital de este sistema es de aproximadamente 7.75 hrs [HT75]) y la

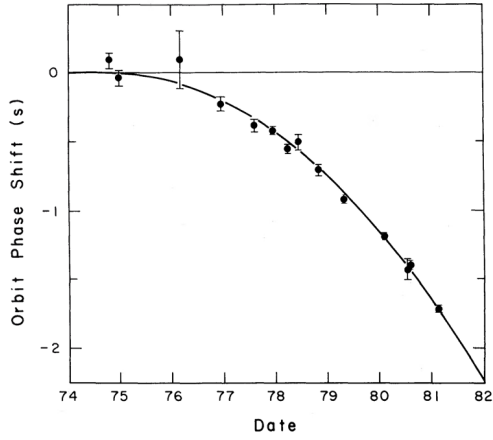


Fig. 6.4: Fuente: [TW82].

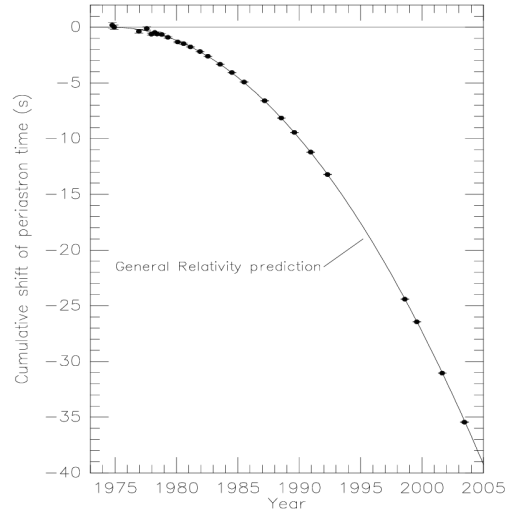


Fig. 6.5: Fuente: [WT04].

gráfica se curva, como se ve en las figuras. Esta tendencia es cualitativamente consistente con el comportamiento esperado en el modelo simplificado desarrollado en este capítulo.

La figura de la izquierda tomada de [TW82] muestra ya una tendencia parabólica en los residuos, consistente con una pérdida de energía orbital según la fórmula cuadrupolar; la figura de la derecha, basada en datos actualizados hasta 2004 [WT04], confirma la misma tendencia con mayor precisión y a lo largo de una ventana temporal más extensa, reforzando la concordancia entre la evolución orbital medida y la predicción relativista para el decaimiento del período. Esta comprobación de la relatividad general, y en particular, de la existencia de las ondas gravitacionales por medio de la visualización de la pérdida de energía del sistema binario, proporcionó una sólida confirmación de la existencia de las ondas gravitacionales predichas por Einstein hacía más de medio siglo atrás [Per17].

6.3.2. Detección Directa

La detección directa de ondas gravitacionales requiere medir variaciones de distancia extremadamente pequeñas entre masas de prueba en caída libre. La estrategia de LIGO consiste en realizar esta medición mediante interferometría láser: un interferómetro tipo Michelson (ver figura 6.6), que convierte un cambio relativo de longitud de los brazos en un desfase óptico medible en el fotodetector [Mag08].

La Figura 6.6 muestra el esquema básico de un interferómetro: el “beam splitter” B divide el haz láser en dos haces que recorren los brazos de longitudes d_1 y d_2 , se reflejan en M_1 y M_2 , y luego recombinan en el fotodetector. En ausencia de perturbaciones, los haces se recombinan de manera destructiva, no permitiendo

al fotodetector recibir el haz del láser. Al pasar la onda gravitacional por el laboratorio, esta produce un cambio relativo en la distancia de los brazos, logrando que los haces se recombinen no destructivamente, permitiendo al fotodetector recibir la señal emitida de manera gradual. Si λ es la longitud de onda del láser, el desfase relativo debido a la diferencia de longitud de los caminos es,

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} 2(d_1(t) - d_2(t)), \quad (6.28)$$

donde el factor 2 viene del viaje ida-vuelta en cada brazo.

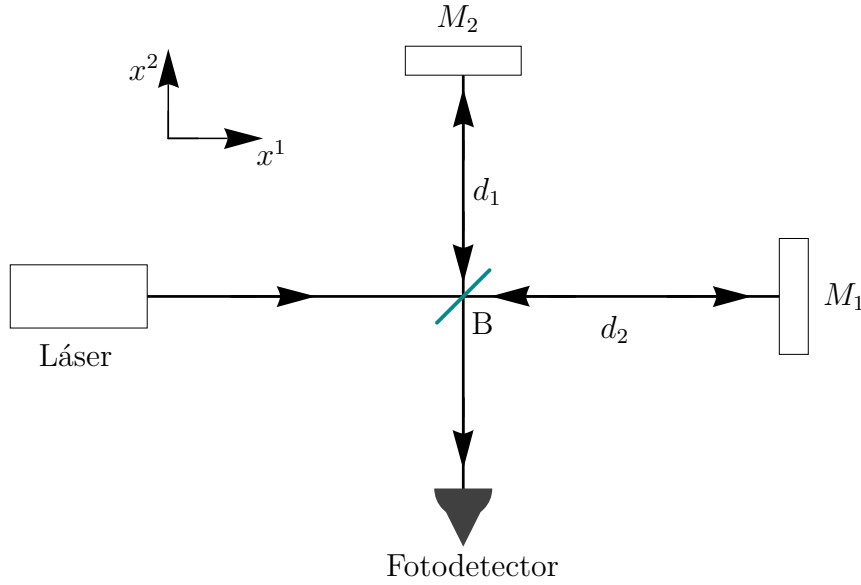


Fig. 6.6: Modelo interferómetro de Michelson.

Situamos el divisor de haz en el origen del sistema de coordenadas y suponemos que la onda gravitacional se propaga en la dirección x^3 , de modo que el efecto es puramente transversal. Recordemos que en el gauge TT, la distancia propia entre el origen y un espejo situado en la posición x^i viene dada por la ecuación (4.6):

$$\delta_{ij} x_B^i x_B^j = \delta_{ij} x_{B0}^i x_{B0}^j + \varepsilon \left[|A_+| \left((x_{B0}^1)^2 - (x_{B0}^2)^2 \right) \cos(\omega t - \varphi_+) + 2|A_\times| x_{B0}^1 x_{B0}^2 \cos(\omega t - \varphi_\times) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

donde A_+ y $A_\times$ representan las amplitudes de las polarizaciones de la onda y ω es la frecuencia de la onda gravitacional.

Por simplicidad, y con el fin de ilustrar el principio de funcionamiento del interferómetro, consideramos una onda plana incidente perpendicularmente al plano del detector y con una sola polarización ($h_+ \neq 0, h_\times = 0$).

Consideremos primero el espejo M_1 ubicado a lo largo del eje x^1 , de modo que en el estado no perturbado se tiene $x^1 = d_0$ y $x^2 = x^3 = 0$. En este caso, la distancia propia al origen resulta

$$d_1(t)^2 = d_0^2(1 + |A_+| \cos(\omega t - \varphi_+)).$$

Análogamente, para el espejo M_2 situado a lo largo del eje x^2 , con $x^2 = d_0$ y $x^1 = x^3 = 0$, se obtiene

$$d_2(t)^2 = d_0^2(1 - |A_+| \cos(\omega t - \varphi_+)).$$

La señal interferométrica se manifiesta como una diferencia de fase entre los haces láser que recorren ambos brazos, dada por

$$\begin{aligned} \Delta\phi(t) &= \frac{4\pi}{\lambda}(d_1(t) - d_2(t)) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda}d_0 \left(\sqrt{1 + |A_+| \cos(\omega t - \varphi_+)} - \sqrt{1 - |A_+| \cos(\omega t - \varphi_+)} \right). \end{aligned}$$

Dado que la amplitud de la onda gravitacional es extremadamente pequeña, $|A_+| \ll 1$, se linealiza la expresión anterior a primer orden, lo que conduce a

$$\Delta\phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda}d_0 |A_+| \cos(\omega t - \varphi_+).$$

Esta expresión muestra que la señal medida por el interferómetro es directamente proporcional al *strain* (perturbación) gravitacional y a la longitud del brazo. En la práctica, lo que mide LIGO es la potencia del láser que llega al fotodetector producido por el desfase de los dos haces de luz al llegar de vuelta al beam splitter y ello permite reconstruir el strain de la figura 6.3.

6.3.3. Aplicación Púlsar Binario PSR B1913+16

Para ilustrar la magnitud de estos efectos, aplicamos nuestros resultados al sistema binario PSR B1913+16 (Hulse-Taylor), la primera prueba indirecta de la existencia de ondas gravitacionales.

De la tabla 6.1 se desprende que la masa total y reducida son

$$M = m_1 + m_2 \approx 2.83 M_\odot, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx 0.707 M_\odot.$$

Además, usando Kepler, el semieje mayor es $a \approx 1.95 \times 10^9$ m.

Debido a que el sistema posee una excentricidad no despreciable, distinguiremos entre las cantidades que incorporan esta corrección y aquellas que se estiman usando las fórmulas deducidas en la aproximación circular. De este modo, los resultados siguientes deben entenderse ya sea como valores corregidos por excentricidad, o bien como estimaciones de orden de magnitud obtenidas a partir del modelo circular desarrollado en las secciones anteriores.

Parámetro	Valor
Masas	$m_1 \approx 1.44 M_\odot, \quad m_2 \approx 1.39 M_\odot$
Período orbital	$T \approx 7.75 \text{ h}$
Excentricidad	$e \approx 0.617$
Distancia a la Tierra	$r \approx 4.1 \text{ kpc} \approx 1.265 \times 10^{20} \text{ m}$

Tabla 6.1: Parámetros del sistema binario PSR B1913+16. Extraídos de [WT04] y [DWNC18]

Potencia radiada. Para estimar la potencia emitida, usamos la fórmula cuadrupolar obtenida en el caso circular y la corregimos mediante el factor de Peters–Mathews asociado a la excentricidad orbital. Para $e \approx 0.617$, este factor vale aproximadamente $f(e) \approx 11.8$, de modo que

$$P = \left(\frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a^4 \omega^6 \right) f(e) \approx 7.8 \times 10^{24} \text{ W}. \quad (6.29)$$

Esta pérdida de energía se traduce, usando la ecuación (6.18) corregida por el factor $f(e)$, en una disminución secular del período orbital, del orden de $\dot{T} \approx -2.4 \times 10^{-12}$. Este valor, al contrastarse con las mediciones reportadas en [WT04], resulta consistente con la predicción relativista al nivel de aproximadamente 0.2 %.

Amplitud característica de la onda. Si se usa la expresión deducida en la aproximación circular para estimar la amplitud del strain que llega a la Tierra, se obtiene

$$h \approx \frac{4G\mu\omega^2 a^2}{c^4 r} \approx 7.1 \times 10^{-23}. \quad (6.30)$$

Esta cantidad debe interpretarse como una amplitud característica de orden de magnitud, pues el sistema real no posee una órbita circular. Aun así, el valor obtenido ilustra claramente la extrema pequeñez de la deformación del espacio-tiempo asociada a una fuente de este tipo.

Estimación circular del tiempo de coalescencia. Finalmente, si se emplea la ecuación (6.23), deducida bajo la hipótesis de órbita circular, se obtiene la estimación

$$t_{\text{coal}} \approx 5.67 \times 10^{16} \text{ s}. \quad (6.31)$$

Es importante subrayar que este valor corresponde sólo a una estimación circular del tiempo restante hasta la colisión. Dado que el sistema posee una excentricidad inicial apreciable, el tiempo real de coalescencia es menor. Además, en un tratamiento más preciso debe considerarse no sólo la dependencia del flujo radiativo con la excentricidad, sino también la evolución temporal de esta última.

Perspectivas de estudio futuro

El desarrollo presentado en esta tesis se ha realizado dentro del marco de la aproximación lineal de la relatividad general, considerando perturbaciones de la métrica de Minkowski y aplicando los resultados obtenidos al caso de sistemas binarios. En este sentido, una continuación natural del presente trabajo consiste en estudiar qué aspectos de la teoría cambian al relajar algunas de las hipótesis adoptadas.

Una primera dirección de interés es el estudio de ondas gravitacionales sobre espacios-tiempo curvos. En lugar de considerar una perturbación de la forma $g = \eta + h$, podría trabajarse con una descomposición más general $g = g_0 + h$, donde g_0 sea una métrica lorentziana no plana. Esto permitiría analizar cómo la curvatura del espacio-tiempo de fondo influye en la propagación de las perturbaciones gravitacionales, así como extender el formalismo a contextos físicamente relevantes, como los espacios-tiempo de Schwarzschild o Kerr.

Otra posible extensión consiste en ir más allá de la aproximación cuadrupolar y del régimen lento utilizados en la descripción de la fuente. Incorporar correcciones multipolares de orden superior, así como términos post-newtonianos, permitiría describir con mayor precisión sistemas binarios compactos en etapas avanzadas de su evolución, donde los efectos relativistas adquieren un rol dominante. Sin embargo, si se desea evadir la singularidad dada por el modelo aproximado y vista en la figura 6.2, entonces se debe usar relatividad numérica para resolver las ecuaciones de Einstein sin aproximaciones.

Por otra parte, se podría seguir con el estudio del efecto memoria gravitacional, predicho por Zel'dovich y Polnarev [ZP74]. En esta tesis se analizó principalmente el carácter oscilatorio de las ondas gravitacionales y su acción sobre partículas de prueba. Sin embargo, existe un fenómeno más sutil, conocido como memoria gravitacional, en el cual el paso de la onda deja una separación relativa permanente entre partículas de prueba. A diferencia de las ondas gravitacionales, este efecto aún no se ha logrado medir y se espera que se logre hacer con el futuro observatorio espacial LISA [IGB+25].

Por último, una posible línea de continuación de este trabajo consiste en interpretar la teoría de perturbaciones desde el espacio de todas las métricas lorentzianas $\text{Lor}(M)$ sobre una variedad diferenciable M . Formalmente, si g_0 es

una métrica de fondo y consideramos una familia $g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2)$ con $|\varepsilon| \ll 1$, entonces la perturbación h puede entenderse como una dirección tangente en g_0 . En este sentido, las perturbaciones métricas pertenecen formalmente al espacio $T_{g_0} \text{Lor}(M) \cong \Gamma(S^2 T^* M)$.

Como vimos en el capítulo 3, si se realiza un difeomorfismo infinitesimal generado por un campo vectorial ξ , la perturbación cambia según

$$h \mapsto h' = h - \mathcal{L}_\xi g,$$

Esto permite introducir una relación de equivalencia en el espacio de perturbaciones simétricas de tipo $(0, 2)$:

$$h \sim h' \iff h' - h = -\mathcal{L}_\xi g$$

para algún campo vectorial $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Así, la perturbación físicamente relevante no es un tensor h individual, sino su clase de equivalencia

$$[h] = \{ h - \mathcal{L}_\xi g : \xi \in \mathcal{X}(M) \}.$$

Desde este punto de vista, el espacio de todas las perturbaciones lineales puede identificarse con

$$\Gamma(S^2 T^* M),$$

mientras que las perturbaciones puramente de gauge son precisamente aquellas de la forma $\mathcal{L}_\xi g$. Por consiguiente, el contenido físico de la teoría linealizada puede interpretarse, como el cociente

$$\Gamma(S^2 T^* M) / \{ \mathcal{L}_\xi g : \xi \in \mathcal{X}(M) \}.$$

Referencias

- [A⁺16] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, 2016.
- [BB15] Philippe Blanchard and Erwin Brüning. *Fourier Transformation*, pages 133–162. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [Car97] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity, December 1997. arXiv:gr-qc/9712019.
- [DC92] Manfredo Perdigao Do Carmo. *Riemannian geometry*, volume 2. Springer, 1992.
- [DWNC18] AT Deller, JM Weisberg, David J Nice, and S Chatterjee. A vlbi distance and transverse velocity for psr b1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, 862(2):139, 2018.
- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 4 edition, 2003.
- [HE23] Stephen W Hawking and George FR Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 2023.
- [HT75] Russell A Hulse and Joseph H Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal*, vol. 195, Jan. 15, 1975, pt. 2, p. L51-L53., 195:L51–L53, 1975.
- [IGB⁺25] Henri Inchauspé, Silvia Gasparotto, Diego Blas, Lavinia Heisenberg, Jann Zosso, and Shubhanshu Tiwari. Measuring gravitational wave memory with lisa. *Physical Review D*, 111(4):044044, 2025.
- [Lam10] Robert J. A. Lambourne. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge University Press, 2010.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2 edition, 2013.
- [Mag08] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008.

- [MTW73] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [Nor20] John D. Norton. Einstein’s conflicting heuristics: The discovery of general relativity. In Claus Beisbart et al., editors, *Thinking About Space and Time*. Springer, 2020.
- [Per17] Volker Perlick. Gravitational waves. Lecture notes (Summer Term 2017). Universität Bremen., 2017.
- [PM63] Philip C Peters and Jon Mathews. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. *Physical Review*, 131(1):435, 1963.
- [Spi99] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 2*. Publish or Perish, Inc., Houston, Tex., 3 edition, 1999.
- [TW82] Joseph H Taylor and Joel M Weisberg. A new test of general relativity-gravitational radiation and the binary pulsar psr 1913+16. *Astrophysical Journal, Part 1, vol. 253, Feb. 15, 1982, p. 908-920. NSF-supported research.*, 253:908–920, 1982.
- [Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [WT04] Joel M Weisberg and Joseph H Taylor. Relativistic binary pulsar b1913+16: Thirty years of observations and analysis. *arXiv preprint astro-ph/0407149*, 2004.
- [ZP74] Ya. B. Zel’dovich and A. G. Polnarev. Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars. *Soviet Astronomy*, 18:17, 1974.

Apéndice

Afirmación. Sea $\hat{n} = (n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{S}^2$ un vector unitario y $d\Omega$ el elemento de área en la esfera unitaria. Entonces

$$\int_{\mathbb{S}^2} n^i n^j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{\mathbb{S}^2} n^i n^j n^k n^\ell d\Omega = \frac{4\pi}{15} \left(\delta^{ij} \delta^{k\ell} + \delta^{ik} \delta^{j\ell} + \delta^{il} \delta^{jk} \right). \quad (\text{A.2})$$

Demostración. Usaremos coordenadas esféricas para las componentes contravariantes

$$n^x = \sin \theta \cos \phi, \quad n^y = \sin \theta \sin \phi, \quad n^z = \cos \theta, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi,$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

1) Prueba de (A.1). Si $i \neq j$, por ejemplo $(i, j) = (x, y)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} n^x n^y d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin \theta \cos \phi)(\sin \theta \sin \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) = 0, \end{aligned}$$

ya que $\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi = 0$. De modo análogo $\int n^x n^z d\Omega = \int n^y n^z d\Omega = 0$.

Si $i = j = x$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (n^x)^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \theta \cos^2 \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right). \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi \quad \text{y} \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3},$$

se obtiene $\int_{\mathbb{S}^2} (n^x)^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3}$. Por simetría, lo mismo vale para $(n^y)^2$.

Finalmente, para $i = j = z$,

$$\int_{\mathbb{S}^2} (n^z)^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Con el cambio $u = \cos \theta$, $du = -\sin \theta d\theta$,

$$2\pi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{4\pi}{3}.$$

Concluimos (A.1).

2) Prueba de (A.2). Basta verificar algunos casos tipo; el resto se obtiene por simetría al permutar índices. Primero,

$$\int_{\mathbb{S}^2} (n^z)^4 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^4 \theta \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_{-1}^1 u^4 du = \frac{4\pi}{5}.$$

El lado derecho de (A.2) con $(i, j, k, \ell) = (z, z, z, z)$ es

$$\frac{4\pi}{15}(1 + 1 + 1) = \frac{4\pi}{5},$$

luego coincide.

Segundo, para $(i, j, k, \ell) = (x, x, z, z)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (n^x)^2 (n^z)^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \theta \cos^2 \phi)(\cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta \right). \end{aligned}$$

La primera integral vale π . En la segunda, con $u = \cos \theta$,

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2)u^2 du = \int_{-1}^1 (u^2 - u^4) du = \frac{4}{15}.$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{S}^2} (n^x)^2 (n^z)^2 d\Omega = \frac{4\pi}{15},$$

que coincide con (A.2) porque, en este caso, $\delta^{ij}\delta^{k\ell} = 1$ y los otros dos términos son cero.

Tercero, para $(i, j, k, \ell) = (x, x, y, y)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (n^x)^2 (n^y)^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \sin^2 \phi d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta \right). \end{aligned}$$

Observamos que $\cos^2 \phi \sin^2 \phi = \frac{1}{4} \sin^2(2\phi)$, por lo que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\phi) d\phi = \frac{\pi}{4},$$

y además

$$\int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \frac{16}{15}.$$

Así,

$$\int_{\mathbb{S}^2} (n^x)^2 (n^y)^2 d\Omega = \frac{4\pi}{15},$$

en acuerdo con (A.2).

□