

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA
DE LA COMPUTACIÓN



Estudio dinámico de la familia cuadrática de Lorenz a dos parámetros

Autor(a)
Nicolás Soto Guajardo

Profesor(a) Guía:
Rafael Labarca Briones

Tesis para optar al grado de magíster en ciencia con la especialidad de matemática

Santiago – Chile
2026

Agradecimientos

Pasaron muchas cosas mientras trabajaba en esta tesis, que hicieron que fuera difícil. Agradezco a los que me empujaron a seguir y no me permitieron tirar la toalla. En particular a mi familia, amigos y profesor.

Índice

1. Introducción	2
2. Preliminares	4
2.1. Un poco de contexto: Espacios topológicos	5
2.1.1. Conjuntos abiertos	5
2.1.2. Conjuntos cerrados	5
2.1.3. Compacidad	6
2.1.4. Topología producto	6
2.2. Variedades y funciones C^∞	7
2.2.1. Funciones suaves	7
2.2.2. Cartas	7
2.2.3. Funciones de transición	7
2.2.4. Atlas suaves	8
2.2.5. Compatibilidad de atlas	8
2.2.6. Atlas maximales y estructuras suaves	8
2.2.7. Variedades suaves	8
2.3. Clasificación de puntos	9
2.4. Estabilidad estructural	10
2.5. Bifurcaciones	12
2.6. Shifts de tipo finito (SFT)	16
2.7. Particiones de Markov para mapas del intervalo	18
2.8. Codificación simbólica y SFT	18
2.8.1. Entropía topológica y el Shift de Milnor–Thurston	19
3. Presentación de $f_{\mu,\nu}(x)$ y análisis de puntos fijos	24
3.1. Puntos fijos para el tramo negativo de $f_{\mu,\nu}(x)$	24
3.1.1. $1 + 4\nu < 0$	24
3.1.2. $0 < 1 + 4\nu < 1$	24
3.1.3. $\nu > 0$	25
3.2. Puntos fijos para el tramo positivo de $f_{\mu,\nu}(x)$	25
3.2.1. $\mu < -\frac{1}{4}$	26
3.2.2. $-\frac{1}{4} < \mu < 0$	26
3.2.3. $0 < \mu < \frac{3}{4}$	26
3.2.4. $\mu > \frac{3}{4}$	26

4. Dinámica de la familia $f_{\mu,\nu}(x)$	27
4.1. Zona A , $\nu < -\frac{1}{4}$	27
4.1.1. Zona A_1 , $\mu < 0$	27
4.1.2. Zona A_2 , $0 < \mu < \frac{3}{4}$	27
4.1.3. Zona A_3 , $\frac{3}{4} < \mu < 1$	28
4.1.4. Zona A_4 , $\mu > 1$	30
4.2. Zona B , $-\frac{1}{4} \leq \nu < 0$	31
4.2.1. Zona B_1 , $\mu < x_-(\nu)$	32
4.2.2. Zona B_2 , $x_-(\nu) < \mu < 0$ (ver figura 7)	32
4.2.3. Zona B_3 , $0 < \mu < \frac{3}{4}$	33
4.2.4. Zona B_4 , $\frac{3}{4} < \mu < 1$	34
4.2.5. Zona B_5 , $1 < \mu < \mu_f(\nu)$	36
4.2.6. Zona B_6 , $\mu > \mu_f(\nu)$:	38
4.3. Zona C , $0 < \nu < 1$	39
4.3.1. Zona C_1 $\mu < x_-(\nu)$	39
4.3.2. Zona C_2 $x_-(\nu) < \mu < 0$	40
4.4. $0 < \mu < \frac{3}{4}$	46
4.4.1. Zona C_3 $0 < \mu < \nu < \sqrt{\mu}$	49
4.4.2. Zona C_4 $0 < \sqrt{\mu} < \nu < M_2$	50
4.4.3. Flip de orden dos para $f_{\mu,\nu}$ en la variable ν	51
4.4.4. Periodo de paz entre el flip de orden 2 y un periodo 3: $M_2 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}} < \nu$	55
4.4.5. $\sqrt{\mu + \sqrt{\nu}} < \nu$	56
4.4.6. Flip de orden tres para $f_{\mu,\nu}$ en la variable ν	59
4.5. Análisis e imágenes de periodos más altos	64
4.5.1. $\nu = \bar{x}(\mu, \nu)$	72
5. Sobre una sucesión de dinámicas de entropía positiva que convergen a una dinámica de entropía nula	73
5.0.1. Algunos cálculos entre los puntos de la sucesión de la curva $\hat{x}(\mu, \nu) = \nu$	90
6. Apéndice	90

1. Introducción

Un marco de referencia fundamental para el inicio de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es el trabajo Henri Poincaré a finales del siglo XIX. Desde una perspectiva geométrica, estudió las ecuaciones diferenciales centrado en la estructura global de sus órbitas, en lugar de sus soluciones explícitas. En sus obra se originan conceptos fundamentales, como órbitas periódicas y estabilidad. Sobre estas ideas, en el trabajo de Andronov y sus colaboradores (ca. 1928-1937), se avanzó sistemáticamente en la teoría de bifurcaciones, describiendo los cambios estructurales en el comportamiento dinámico bajo variaciones del parámetro.

Paralelamente, a esta mirada geométrica-estructural de las ecuaciones diferenciales, desde principios del siglo XX, se desarrollaban ideas que se consideran el germen de la dinámica simbólica. En los trabajos de Hadamard, Morse y Birkhoff, se codifican órbitas mediante secuencias simbólicas, midiendo complejidad de las trayectorias, recurrencia, y cerraduras de órbitas con sucesiones que describen la evolución como herramienta.

Luego de estos estudios, ya se observaban comportamientos complicados para sistemas de bajas dimensiones (muchas órbitas periódicas, alta dependencia a condiciones iniciales, saltos irregulares), sin embargo faltaban herramientas matemáticas para estudiar y entender de dónde salía tanta complejidad (a partir de aparentemente funciones simples).

Cuando hablamos de poner orden al caos, hay un nombre que sobresale bastante. En el contexto de dinámica unidimensional, el teorema de Sharkovsky (1964) reveló una estructura combinatorial universal al organizar las órbitas periódicas de iteraciones del intervalo, sentando bases para describir simbólicamente (y por consecuencia entrópicamente) las dinámicas en el intervalo real.

Construyendo sobre estas ideas, Misiurewicz (1973-1979), usó sistemáticamente un tipo de sucesiones llamadas *kneading*, que codifican el comportamiento combinatorial de las órbitas críticas en el intervalo, dando un sustento simbólico al estudio de bifurcaciones y entropía en dinámica no hiperbólica, de manera paralela, también pionero en el uso de itinerarios, se encuentra el trabajo de N. Metropolis, M.L. Stein y P.R. Stein, *On finite limit sets for transformations in the unit interval*, quienes analizan cascadas de doble periodo en familias creciente-decrescentes. Mientras se sentaban las bases teóricas, directamente desde la rama aplicada de las matemáticas y con computadores dispuestos a hacer cálculos gigantescos, los trabajos de Feigenbaum sobre las proporciones en las cascadas de doble periodo, a mi parecer jugó un rol crucial, esparciendo la idea de que mapeos simples y deterministas podían resultar en comportamiento caótico. Además trabajó en la formalización de la idea de que las estructuras se repiten “haciendo zoom” en el intervalo: La renormalización.

Milnor y Thurston (1988) formalizaron y juntaron la mayoría de estas ideas. Su trabajo con secuencias *kneading*, que capturan la esencia de la dinámica a partir de las órbitas críticas, generó un entendimiento capaz de formalizar resultados sobre el crecimiento de puntos periódicos, monotonía de la entropía, y sobre la estructura del espacio de parámetros.

Basándose en lo anterior, los últimos años, Moreira, Labarca, y Aranzubia (ca. 1995-presente), han extendido estas ideas a un estudio detallado del espacio de parámetros y monotonía de la entropía para distintas familias de funciones. En sus esfuerzos han explorado cómo el entretejido de Milnor-Thurston se manifiesta en los mapeos, dando estimaciones cuantitativas de las distribuciones de las órbitas y la variación de entropía en función del parámetro. Conectando los itinerarios simbólicos a invariantes medibles.

A la hora de estudiar familias específicas de funciones, llaman la atención aquellas que tengan tanto una riqueza combinatorial como en la estructura de sus bifurcaciones, una familia fructífera es la familia cuadrática de Lorenz a dos parámetros. Curiosamente, esta familia surge al discretizar un modelo atmosférico, teniendo

un origen completamente continuo.

Tanto en la tesis doctoral de Aranzubia como en las publicaciones de Aranzubia y Labarca, se han investigado en general las familias cuadráticas crecientes-crecientes, con un máximo global claro, que desde el análisis lexicográfico proporciona un orden para seguir.

La familia que es el foco principal en este trabajo es del estilo creciente-decreciente y tiene (en general) distintos valores para lados distintos de la discontinuidad, que en este caso se puede apreciar en el gráfico de la función como la desconexión fuerte (un salto vertical) en el cero.

$$f_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \nu - x^2 & \text{si } x < 0 \\ \mu - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

En una situación similar a la nuestra, Axel Silva, en su tesis de magister, estudió la dinámica generada por esta familia al mantener un parámetro (μ) nulo, en particular una seguidilla de bifurcaciones de tipo flip encadenadas por una interesante regla de recurrencia.

Uno de los objetivos de este trabajo es extender el estudio al variar ambos parámetros a la vez, describiendo más terreno en el espacio de parámetros y convirtiendo bifurcaciones puntuales en curvas de bifurcación.

En los preliminares se introducen en primer lugar herramientas para clasificar y analizar el itinerario de puntos en el intervalo, y el concepto de estabilidad estructural. Luego, se clasifican y caracterizan distintos tipos de bifurcaciones, éstas catalogan los diferentes cambios estructurales en la dinámica generada por la función, a partir de sus parámetros y derivadas de distintos órdenes.

El análisis de la dinámica del sistema se materializa en un espacio de parámetros μ contra ν ; este mapa será descrito por zonas a medida que recorremos el plano μ contra ν .

Para tener una representación visual, se creó un código de Python que itera la aplicación en el intervalo, con una interfaz que permite analizar las distintas iteraciones de la función y cambiar los parámetros en tiempo real. Además, este código entrega el espacio de parámetros con las curvas que describen los distintos fenómenos de la dinámica. El desarrollo de este programa permitió generar intuición, realizar experimentos, y apreciar de manera visual la evolución del intervalo.

Para finalizar se mostrará una sucesión de curvas de bifurcación, que intersectadas con otra aplicación en el plano; describen una seguidilla de casos en el que, para cada uno hay un valor de entropía positivo, pero que convergen a una curva que describe una dinámica con entropía nula.

2. Preliminares

Lo más natural al estudiar la evolución de un evento, es ver que cosas se repiten, cuales parecen no cambiar (son fijas) y en general cómo evolucionan o "viajan.^{en} el tiempo. Luego de situar el contexto, definiremos puntos con estas características.

2.1. Un poco de contexto: Espacios topológicos

Para trabajar sobre un terreno firme, y tener claro qué estructuras queremos mantener (o heredar) en el objeto matemático generado a partir de iterar funciones, introducimos nociones básicas de espacios topológicos.

Definición 1. Una **topología** sobre X es una colección $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
2. (Estabilidad por uniones arbitrarias) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$$

3. (Estabilidad por intersecciones finitas) Si $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces

$$\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau.$$

Definición 2. El par (X, τ) se llama **espacio topológico**. Los elementos de τ se llaman **abiertos**.

2.1.1. Conjuntos abiertos

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Definición 3. Un subconjunto $U \subseteq X$ es **abierto** si y solo si

$$U \in \tau.$$

2.1.2. Conjuntos cerrados

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Definición 4. Un subconjunto $F \subseteq X$ es **cerrado** si su complemento es abierto, es decir:

$$F \text{ es cerrado} \iff X \setminus F \in \tau.$$

De la definición de abierto, vía complemento:

- $\emptyset$ y X son cerrados.
- Intersecciones arbitrarias de cerrados son cerradas.
- Uniones finitas de cerrados son cerradas.

2.1.3. Compacidad

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Definición 5. Un **recubrimiento abierto** de X es una familia $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ tal que

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Definición 6. El espacio X es **compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito, es decir:

Si

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

entonces existen índices $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

Bases de una topología

Definición 7. Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice **base** de una topología sobre X si:

1. Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
2. Si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

En tal caso, la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ define una topología en X , llamada la **topología generada por $\mathcal{B}$** .

2.1.4. Topología producto

Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos.
Consideremos el producto cartesiano

$$X = \prod_{i \in I} X_i.$$

Para cada $j \in I$, definimos la **proyección canónica**:

$$\pi_j : X \rightarrow X_j, \quad \pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j.$$

Definición 8. La **topología producto** sobre X es la topología más débil que hace continuas todas las proyecciones π_j .

Equivalentemente:

Proposición 1. Una base de la topología producto está formada por los conjuntos de la forma

$$\prod_{i \in I} U_i$$

donde:

- $U_i \in \tau_i$,
- $U_i = X_i$ para todos salvo un número finito de índices.

2.2. Variedades y funciones C^∞

Para utilizar herramientas de cálculo, necesitamos trabajar en un contexto donde las superficies y las funciones sean “suaves”. Agregamos nociones básicas de variedades

2.2.1. Funciones suaves

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

Definición 9. Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^k si todas sus derivadas parciales de orden menor o igual que k existen y son continuas en U .

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multiíndice con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, definimos

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Entonces f es de clase C^k si $D^\alpha f$ existe y es continua para todo multiíndice α con $|\alpha| \leq k$.

Definición 10. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se dice suave (o de clase C^∞) si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si $V \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $F : U \rightarrow V$ es una aplicación, escribimos

$$F = (F^1, \dots, F^m),$$

donde cada $F^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función componente.

Definición 11. La aplicación $F : U \rightarrow V$ se dice suave si cada una de sus componentes F^i es una función suave.

2.2.2. Cartas

Definición 12. Sea M un espacio topológico. Una carta de dimensión n en M es un par (U, φ) tal que

- $U \subset M$ es un abierto,
- $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$.

La aplicación φ se denomina mapa de coordenadas.

2.2.3. Funciones de transición

Definición 13. Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas en M con $U \cap V \neq \emptyset$. La aplicación

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

se denomina función de transición.

2.2.4. Atlas suaves

Definición 14. *Un conjunto de cartas*

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

se llama un atlas suave si

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,
2. *para cualesquiera α, β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función de transición*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

es una aplicación suave.

2.2.5. Compatibilidad de atlas

Definición 15. *Dos atlas suaves sobre M se dicen compatibles si su unión también es un atlas suave.*

2.2.6. Atlas maximales y estructuras suaves

Definición 16. *Sea $\mathcal{A}$ un atlas suave sobre M . Decimos que $\mathcal{A}$ es maximal si no existe un atlas suave $\mathcal{B}$ tal que*

$$\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}.$$

*Equivalentemente, $\mathcal{A}$ es maximal si cualquier carta que sea suavemente compatibles con el todas las cartas en $\mathcal{A}$ ya pertenece a $\mathcal{A}$. Por esto, a este tipo de atlas también se le llama **completo***

Definición 17. *Una estructura suave sobre M es un atlas suave maximal.*

2.2.7. Variedades suaves

Definición 18. *Una variedad suave de dimensión n es un espacio topológico M que*

1. *es Hausdorff,*
2. *tiene base numerable,*
3. *está provisto de una estructura suave de dimensión n .*

2.3. Clasificación de puntos

Sea X una superficie de clase C^∞ tal que $x_0 \in X$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $g : X \rightarrow X$ $g \in C^k$, para un $k > 1$ suficientemente grande.

Definición 19. Diremos que x_0 es **punto fijo** de g si $g(x_0) = x_0$

Definición 20. Diremos que x_0 es un **punto periódico de periodo** n_0 de g si $g^{n_0}(x_0) = x_0$ y también $g^n(x_0) \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq n < n_0$

Definición 21. Dada la existencia de un punto periódico de periodo n_0 , podemos definir su **órbita** como el conjunto $\gamma = \{g^n(x_0) : n < n_0\}$.

Definición 22. Consideremos el sistema dinámico discreto $x \rightarrow g(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$. Y sea x_0 un punto fijo de g . Denotaremos como

$$A = J_g(x_0)$$

la matriz jacobiana de g evaluada en el punto fijo.

Diremos que x_0 es un **atractor** si todos los valores propios de A , $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ fijo, satisfacen

$$|\lambda_i| < 1$$

Por otro lado, si los valores propios cumplen

$$|\lambda_i| > 1$$

entonces, diremos que x_0 es un **repulsor**.

Notemos que en el caso unidimensional, el valor propio coincide con la derivada de la función.

Además, dejamos fuera algunos casos. Revisaremos particularmente cuando los valores son 1 y -1 más adelante.

Considerando x_0 un punto fijo de g , y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de $A = Jg(x_0)$. Agruparemos estos valores propios, también llamados **multiplicadores** en el contexto de los sistemas dinámicos, a partir de su relación de pertenencia con el círculo unitario.

Definición 23. n_- : Número de multiplicadores de x_0 con norma menor a 1.

Definición 24. n_+ : Número de multiplicadores de x_0 con norma mayor que 1.

Definición 25. n_1 : Número de multiplicadores de x_0 con norma igual a 1

Definición 26. Un punto fijo x_0 se dice **hiperbólico** si $n_1 = 0$

2.4. Estabilidad estructural

Luego de clasificar los puntos, es natural el querer formalizar equivalencia entre sus comportamientos a partir de las funciones que les dan su itinerario. ¿Cuándo dos comportamientos se consideran iguales? ¿cómo podemos asegurarnos que los puntos viajan de manera parecida al generarse a partir de funciones similares?

Para esta tarea, se utiliza un homeomorfismo que nos sirve de "traductor" entre las dinámicas de las funciones.

Este, gracias a su suavidad, perpetúa las órbitas de los puntos, manteniendo periodicidad de los mismos órdenes (incluyendo puntos fijos), conserva el comportamiento límite de los puntos (esto es particularmente importante en los bordes de los abiertos), y gracias a su biyectividad puede corresponder ambos conjuntos sobre los que se definan las funciones.

Así

Definición 27. Si $f, g : X \rightarrow X$ son dos aplicaciones que satisfacen la relación

$$h \circ f = g \circ h$$

para algún homeomorfismo $h : X \rightarrow X$, diremos que son **topológicamente conjugadas**.

Si f y g son topológicamente conjugadas, diremos que son *topológicamente equivalentes*, o si el contexto es claro, equivalentes.

De manera natural, si consideramos funciones continuas por partes, como será en la familia estudiada en la tesis, esta definición acepta una extensión para funciones continuas a trozos, correspondiendo los intervalos conjugados, aplicando esta definición para cada sección sin discontinuidades.

Como en este contexto, al comparar funciones nos interesa contrastar el comportamiento de todas las órbitas, con esto en mente: Sea $X \in \mathbb{R}^k$ una superficie compacta. Para $f, g : X \rightarrow X$, $f, g \in \mathcal{C}^n(X, X)$, se define

$$D_n(f, g) = \sup \left\{ d \left(\frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i}, \frac{\partial^i g(x)}{\partial x^i} \right), x \in X, 0 \leq i < n \right\}$$

Como una distancia para funciones con n derivadas continuas. Esta definición se extiende también para funciones continuas a trozos, con la variable x corriendo en cada intervalo en el que las funciones son continuas.

Definición 28. Diremos que $f \in \mathcal{C}^n(X, X)$ es estructuralmente estable en $\mathcal{C}^n(X, X)$ si existe una vecindad $\mathcal{U}_f$ de f tal que $\forall g \in \mathcal{U}_f$, f es **topológicamente conjugado con g** .

Es decir, $f \in \mathcal{C}^n$ será estructuralmente estable si su comportamiento dinámico no varía en funciones D_n -cercanas.

La **hiperbolicidad** de los puntos fijos juega un papel estabilizador en este contexto, su invertibilidad permite hacer traducciones localmente alrededor de este tipo de puntos, este resultado se generaliza como

Teorema 1. (Hartman-Grobman) Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 -difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico en $x_0 = 0$. Entonces existe un homeomorfismo h definido en alguna vecindad U de x tal que

$$h(g(x)) = Dg(x_0)h(x), \quad \forall x \in U$$

Este teorema se puede entender como que localmente cerca de los puntos fijos, el comportamiento cualitativo de la función (atracción, repulsión, periodos) es el mismo vía homeomorfismo que el de su aproximación lineal.

Ejemplo 1. Apliquemos este resultado:

Consideremos

$$f_r(x) = rx(1 - x), x \in [0, 1]; r \in (0, 4]$$

Despejando $f_r(x) = x$,

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{r-1}{r}$$

Calculamos su derivada

$$\frac{\partial f_r(x)}{\partial x} = r(1 - 2x)$$

Revisemos el comportamiento de la pendiente de la función en x_0 y x_1 :

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = r \neq 0 \quad (2)$$

En este contexto unidimensional, esto implica que $x_0 = 0$ es hiperbólico para $r \neq 1$.

Aquí **Hartman-Grobman** $\implies$ Estabilidad estructural local cerca de x_0 .

Si estudiamos el otro punto fijo, podemos mirar como en función del parámetro r su hiperbolicidad está en juego, estudiar estos puntos claves es la manera más natural de observar cuando el mover un parámetro **bifurca** un sistema.

Evaluamos la derivada en x_1

$$\frac{\partial f_r(x_1)}{\partial x} = r(1 - 2 \cdot \frac{r-1}{r}) = 2 - r$$

Osea que si $|2 - r| \neq 1$, hay estabilidad cerca del punto (Hartman-Grobman), al expandir el valor absoluto:

$$\text{si } 1 < r < 3 \implies \left| \frac{\partial f_r(x_1)}{\partial x} \right| < 1 \quad (3)$$

Consideremos un ejemplo concreto $r = 3,2 > 3$.

$$x_1(3,2) = 0.6875; \quad \frac{\partial f_r(x_1(3,2))}{\partial x} = -1.2$$

Osea que x_1 pasó de ser atractor a repulsor luego de cruzar 3. Una señal clara y suficiente para mostrar que el comportamiento dinámico de un punto (y uno importante) cambió (esta vez radicalmente).

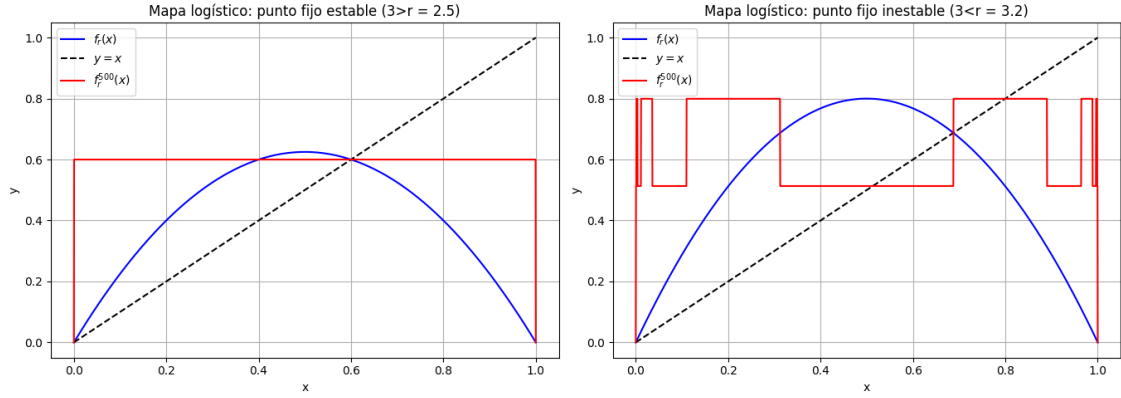


Figura 1: Mapa logístico ejemplificando la pérdida de estabilidad estructural en $r = 3$, en azul la función, en rojo iterada 500 veces y la identidad en línea punteada negra.

Con esta intuición preparamos el terreno para definir bifurcaciones.

2.5. Bifurcaciones

En el ejemplo anterior, apuntamos a que el interés es monitorear los puntos fijos y sus multiplicadores en relación con el parámetro que domina la familia de funciones, y los puntos críticos a medida que este varíe. Es decir, el cambio de la dinámica producida por la familia de funciones en la medida que cambia su parámetro, definimos ahora

Definición 29. Sea $\{F_\mu\} \subset J$ una familia de funciones F_μ tal que $F_\mu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que ocurre una bifurcación en $\mu_0 \in J$ si existe $\mathcal{U} \subset I$, vecindad abierta tal que para cada vecindad de μ_0 , $\mathcal{V}_{\mu_0} \subset J$, hay **otro** elemento $\mu_1 \in \mathcal{V}_{\mu_0} \setminus \{\mu_0\}$ tal que $F_{\mu_1}|_{\mathcal{U}}$ no es localmente equivalente a $F_{\mu_0}|_{\mathcal{U}}$.

Esta definición formaliza que, la familia de funciones F_μ tiene un valor de bifurcación en $\mu = \mu_0$, si ocurre que pequeñas variaciones en el parámetro μ producen variaciones en la dinámica de F_μ , para variaciones de μ tan cercanas como se quiera de μ_0

En la sección pasada no desarrollamos casos en los que (unidimensionalmente) la derivada de la función generadora tiene módulo unitario. Ahora estudiaremos el caso positivo($=1$) y negativo($=-1$), para el primero, consideremos

Sea $x \rightarrow f(x, a)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, a) \\ x &\rightarrow a + x + x^2 \equiv f(x, a) \end{aligned} \tag{4}$$

Ejemplo 2. Resolviendo la ecuación de punto fijo, encontramos

$$x_1(a) = \sqrt{-a} \tag{5}$$

$$x_2(a) = -\sqrt{-a}$$

Primero, observamos que $f(x, a)$ tiene dos puntos fijo para $a < 0$, $x_1(a)$ es un atractor y $x_2(a)$ un repulsor.

Si $a = 0$, el origen es el único punto fijo y este repele a los positivos y atrae a los negativos.

Como sabemos, la raíz no está definida para valores de a positivos por lo tanto no, hay puntos fijos. Adjuntamos este gráfico muy pedagógico directamente desde el apunte [?]

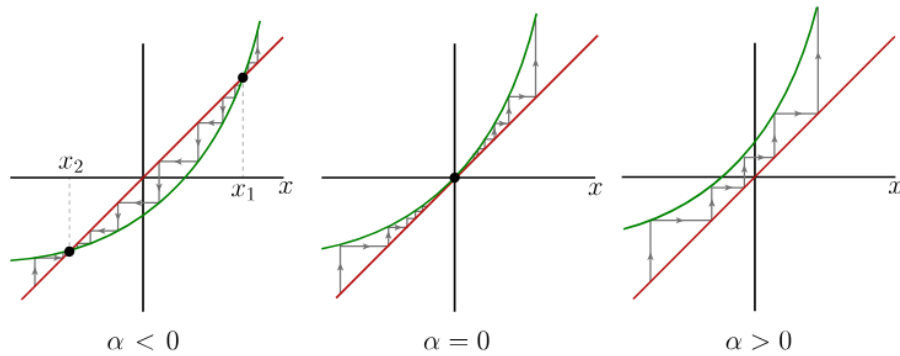


Figura 2: Ejemplo gráfico de una bifurcación silla-nodo

Pensando de manera elemental, un cambio poco significativo para un sistema dinámico sería el que un punto fijo deje de serlo. Esto es una bifurcación en todo su derecho, ya que la desaparición de un punto fijo es algo significativo en la dinámica (en particular cambia/desperece la órbita de un punto). Sin embargo, las bifurcaciones que analizaremos a continuación, tienen como protagonistas la pérdida de hiperbolicidad de puntos fijos.

Lo que trae como consecuencia la aparición o desaparición de más de un punto fijo a la vez.

Como estos cambios son fundamentales, hay una dinámica pre bifurcación y otra, bastante distinta, post bifurcación.

Definición 30. Sea $f(x, a)$ una función suave que satisface

- $f(x_0, a_0) = x_0$ (f tiene un punto fijo x_0 para $a = a_0$)
- $Jf(x_0, a_0) = 1$ (valor propio 1 en (x_0, a_0))
- $\frac{\partial^2 f((x_0, a_0))}{\partial x^2} \neq 0$ (Término de segundo orden no se anula en (x_0, a_0))
- $\frac{\partial a}{\partial x} f((x_0, a_0)) \neq 0$ (f cambia con respecto a a (no constantemente) cerca de (x_0, a_0))

En este caso, diremos que f tiene una bifurcación tipo **silla-nodo** en a_0 .

Este tipo de bifurcación se caracteriza por que previo a que se produzca, no hay punto fijo definido en la vecindad, pero cuando se produce, aparecen dos simultáneamente, uno de carácter atractor y otro repulsor, esto las convierte en cambios muy

repentinos y fuertes en familias de funciones. Es muy interesante que al momento de producirse la bifurcación, estos puntos colapsan en un único punto fijo, que se comporta como repulsor a un lado y atractor del otro lado. Formalizando, dadas las condiciones previas, tenemos

Lema 1. *Existen intervalos $(-\delta, 0)$ y $(\rho, 0)$, y un radio $r > 0$ que cumplen:*

1. *Si $\alpha \in (-\delta, 0)$, entonces $f(x, a_0)$ tiene dos puntos fijos en $(x_0 - r, x_0 + r)$, ambos hiperbólicos, uno atractor y el otro repulsor.*
2. *Si $\alpha \in (0, \rho)$, entonces $f(x, a_0)$ no tiene puntos fijos en $(x_0 - r, x_0 + r)$.*

Se puede encontrar la prueba para este lema en [10].

Definición 31. *Consideremos el sistema dinámico unidimensional generado a partir de*

$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in I \subset \mathbb{R},$$

con f suave, donde I es un intervalo abierto que contiene α^ . Si f además cumple que*

- $f(x_0, \alpha^*) = x_0$,
- $Jf(x_0, \alpha^*) = -1$
- $a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x_0, \alpha^*)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f(x_0, \alpha^*)}{\partial x^3} \neq 0$ *No degeneramiento*
- $\frac{d}{d\alpha} \frac{\partial f(x_0, \alpha^*)}{\partial x} \neq 0$, *Tranversalidad*

en una vecindad de (x_0, α^) .*

*Entonces f tiene una bifurcación de tipo **flip (o dobla periodo)** en α^* .*

Como antes, citamos el lema que caracteriza el cambio en los puntos fijos en este tipo de bifurcaciones.

Lema 2. *Existen intervalos $(-\delta, 0)$ y $(\rho, 0)$, y un radio $r > 0$ que cumplen:*

1. *Si $\alpha \in (-\delta, 0)$, entonces $g = f(f(x, a_0), a_0)$ tiene tres puntos fijos en $(x_0 - r, x_0 + r)$. El mayor y el menor forman una órbita hiperbólica atractor de periodo dos para f , y el punto del medio es un punto fijo hiperbólico repulsor para f .*
2. *Si $\alpha \in (0, \rho)$, entonces $g = f(f(x, a_0), a_0)$ tiene un único punto fijo en $(x_0 - r, x_0 + r)$, el cual es un punto fijo hiperbólico atractor para f .*

Se puede encontrar la prueba de este lema en [10] Esta bifurcación es de las más conocidas debido a el famoso mapa logístico, en el que hay una cascada de duplicación de periodo clásica. Como dice su nombre, esta se caracteriza porque previo al flip, hay un punto fijo atractor hiperbólico, y post-flip, este punto se transforma en repulsor, y en su lugar, es reemplazada por una órbita del doble del periodo. Como antes, formalmente

Miremos un ejemplo muy general de este fenómeno, consideremos el sistema

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha) \equiv -(1 + \alpha)x + x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Es claro que este polinomio se anula en $x_0 = 0$, de esta manera nuevamente tenemos un punto simple para ejemplificar la bifurcación.

Si observamos su multiplicador al calcular su derivada, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} = -(1 + \alpha) \quad (7)$$

Osea que tendremos casos distintos cuando α cambie de signo:

Si $\alpha < 0$ tal que $|\alpha| < 1$, el origen será un atractor (no es necesariamente el único punto fijo).

Al momento que $\alpha = 0$, tenemos el valor clave, el origen alcanza un multiplicador -1, pierde hiperbolicidad.

Finalmente, si $\alpha > 0$ nuestro punto fijo será un repulsor. Esto se mantiene para cualquier $\alpha > 0$. Sin embargo, la órbita de periodo 2 que se genera, solamente existe para valores pequeños de α .

En este caso, y en otros, debido a lo complicado de las reglas de asignación, es difícil encontrar simbólicamente ambos puntos del periodo (o punto fijo de orden 2), sin embargo, el caso que estamos tratando es el caso más simple para una bifurcación tipo flip. Este cumple directamente las condiciones restantes, **transversalidad** y **no degeneramiento**. Evitar estos cálculos es una herramienta fundamental en el estudio de bifurcaciones.

En efecto, derivando respecto a α

$$\frac{\partial f_x}{\partial \alpha} = -1 \neq 0, \quad \forall \alpha \quad (8)$$

La transversalidad se cumple siempre.

Para la condición de no degeneración, calculamos la segunda y tercera derivada y evaluamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= 6 \end{aligned}$$

Entonces el criterio con esta función queda como

$$a = \frac{1}{2} 36x^2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \quad (9)$$

Es claro que evaluando en 0 se tiene $a \neq 0$. Por lo tanto, hay una bifurcación de tipo flip en $\alpha = 0$.

El valor de la órbita atractora se puede encontrar truncando la función a términos más pequeños con su expansión de Taylor, en la literatura estos en general se aproximan como $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Miremos los tres casos descritos en este ejemplo con el gráfico del apunte.

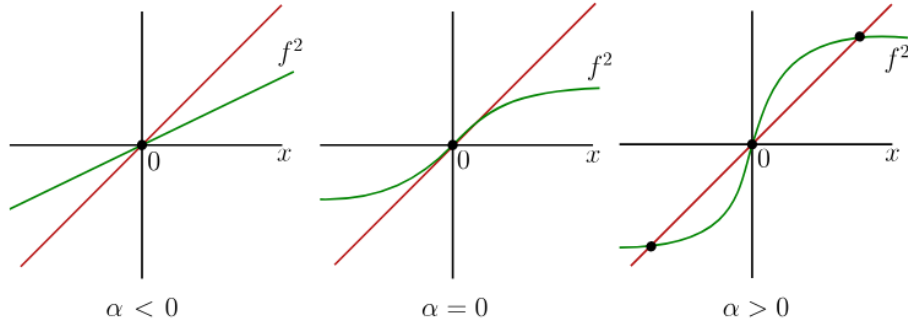


Figura 3: Ejemplo graficado de una bifurcación flip/dobla periodo

2.6. Shifts de tipo finito (SFT)

Complementaremos el estudio de esta familia de funciones con la teoría de dinámica simbólica. En adelante seguiremos el clásico libro de Lind y Marcus. En una pequeña introducción estableceremos las condiciones para conectar la dinámica generada por iteraciones del intervalo con la de algún SFT.

Sea $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$ un alfabeto finito. Denotamos por

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{(x_k)_{k \geq 0} : x_k \in \mathcal{A}\} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} | x \text{ función}\}$$

el espacio de sucesiones, provisto de la topología producto. El *shift* (unilateral) es la aplicación

$$\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad (\sigma x)_k = x_{k+1}.$$

Definición 32. Un subshift es un subconjunto cerrado $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ invariante por σ .

Equivalentemente, un subshift puede describirse mediante un conjunto $\mathcal{F}$ de palabras prohibidas:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \text{ninguna palabra de } \mathcal{F} \text{ aparece en } x\}.$$

Definición 33. Un subshift Σ es de tipo finito (SFT) si el conjunto $\mathcal{F}$ de palabras prohibidas puede elegirse finito.

De manera equivalente, un SFT puede definirse mediante una matriz de transición finita.

Definición 34. Sea $A = (A_{ij})$ una matriz $n \times n$ con entradas en $\{0, 1\}$. El shift de tipo finito asociado a A es

$$\Sigma_A = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : A_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}.$$

Todo SFT es topológicamente conjugado a un sistema de la forma (Σ_A, σ) para alguna matriz A finita [2, Cap. 3].

Definición 35 (Memoria de un shift, Lind & Marcus). Sea $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un shift sobre un alfabeto finito $\mathcal{A}$, y sea σ el operador de shift.

Decimos que X tiene memoria m si, X está completamente determinado por los bloques de longitud $m + 1$. Es decir, existe un conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{m+1}$ tal que

$$X = \Sigma_{\mathcal{F}}.$$

Algunas nociones de memoria

- La **memoria** mide cuántos símbolos del *pasado* necesitamos conocer para saber si un símbolo actual es permitido.
- Un shift con memoria m es un sistema donde el *futuro inmediato* depende solo de los últimos m símbolos.
-

Ejemplo 3. En estos ejemplos, consideraremos el shift con dos símbolos con distintas restricciones.

- *Shift completo:* Si no consideramos ninguna restricción, cualquier símbolo s puede seguir luego de cualquier otro símbolo z , por lo que la palabra sz siempre está permitida. En efecto esto es tener memoria 0 (el tamaño del bloque que debo mirar para verificar si puedo agregar el siguiente símbolo es 0)
- *El shift de Fibonnaci:* Consideramos la restricción $\mathcal{F} = \{11\}$ Para crear una sucesión perteneciente a el shift creado por esta restricción, una forma natural es ir agregando símbolos de dos en dos, y verificar que ninguno de ellos tenga dos unos seguidos. Sin embargo, a partir de la noción de memoria, que en este caso tiene valor 1, a la hora de poner cada símbolo, sólo debemos revisar el símbolo anterior:
 - Si el símbolo anterior es un 1, solo puede continuar un 0.
 - Si el símbolo anterior es un 0, puedo poner cualquier símbolo.

El caso que se estudiará principalmente en la tesis entra en esta categoría: Tiene memoria 1.

Para contrastar los casos anteriores, pensemos en el Even shift (shift par). Este shift está formado por las sucesiones que tienen una cantidad par de ceros entre cada 1. En función de sus palabras prohibidas:

$$\mathcal{F}_{\text{Even}} = \{\infty^{2k+1}\infty : k \in \mathbb{N}\}$$

Para revisar si una letra es admisible para continuar, la cantidad de símbolos que debo revisar es infinita. Este shift es del tipo sófico, no es de tipo finito. El lector puede ahondar en estos temas en [2]

2.7. Particiones de Markov para mapas del intervalo

Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un mapa monótono a trozos y sea

$$0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$$

una partición finita del intervalo. Denotamos

$$\mathcal{P} = \{I_i = (c_{i-1}, c_i)\}_{i=1}^n.$$

Definición 36. Decimos que $\mathcal{P}$ es una partición de Markov para f si se cumplen:

1. (Monotonía por ramas) f es estrictamente monótona en cada intervalo I_i .
2. (Propiedad de Markov) Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$f(I_i) \cap I_j \neq \emptyset \implies f(I_i) \supset I_j.$$

3. (Alineación de los bordes) Para todo $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$f(c_k^-), f(c_k^+) \in \{c_0, \dots, c_n\}.$$

Nota: Aquí $f(c_k^-) = \lim_{x \rightarrow c_k^-} f(x)$, $f(c_k^+) = \lim_{x \rightarrow c_k^+} f(x)$

—

2.8. Codificación simbólica y SFT

Sea $\mathcal{P}$ una partición de Markov para f . Definimos la *codificación simbólica*

$$\pi : \left([0, 1] \setminus \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{c_0, \dots, c_n\}) \right) \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

por

$$\pi(x) = (s_k)_{k \geq 0}, \quad s_k = i \iff f^k(x) \in I_i.$$

Nota: A la sucesión $\pi(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, es también llamado el itinerario de la órbita, bajo f , del punto $x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\{c_0, \dots, c_n\})$

Teorema 2. [Lind–Marcus] Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un mapa monótono a trozos y sea $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_n\}$ una partición de Markov para f . Supóngase además que:

1. (Expansividad local uniforme) Existe $\lambda > 1$ tal que

$$|f'(x)| \geq \lambda \quad \text{para todo } x \in I_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces la imagen $\Sigma = \pi([0, 1])$ es un shift de tipo finito. Más precisamente, $\Sigma = \Sigma_A$, donde la matriz de transición $A = (A_{ij})$ está dada por

$$A_{ij} = 1 \iff f(I_i) \cap I_j \neq \emptyset.$$

La aplicación π define una semiconjugación entre $(f, [0, 1])$ y (Σ_A, σ) , que es una conjugación topológica fuera del conjunto numerable de preimágenes de los bordes.

Notas:

1. *No se requiere continuidad ni expansividad en los puntos de la partición $\{c_0, \dots, c_n\}$. La condición de Markov es global y esencial para garantizar que la dinámica simbólica tenga memoria finita.*
2. *Las condiciones para esta codificación sintetizan la estrategia que da orden y estructura al espacio de sucesiones a partir del itinerario de los puntos vía f .*
3. *Por ejemplo, la condición sobre la derivada es esencial para asegurar que si*

$x, y \in \{[0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\{c_0, \dots, c_n\})\}$ y sus itinerarios $\pi(x) = \pi(y)$ coinciden, entonces $x = y$

; esto es, la inyectividad de el itinerario π .

A continuación se mostrará esta construcción en detalle, siguiendo directamente desde [1]

2.8.1. Entropía topológica y el Shift de Milnor–Thurston

En esta sección seguimos la construcción de *Shift de Milnor–Thurston* en [1], que define nuestro principal objeto de estudio: **el conjunto límite generado a partir de la función**. También se recogen las herramientas para el cálculo de la entropía. Consideremos

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n-1} = 1,$$

$2n$ puntos en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Sea

$$I_j = [x_{2j}, x_{2j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

y sea

$$T : \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j \longrightarrow [0, 1]$$

una aplicación tal que su restricción a cada I_j es lineal y biyectiva.

La restricción de T a I_j puede preservar o invertir la orientación. Esto implica que existen 2^n aplicaciones distintas con estas características.

Además, todas satisfacen

$$\lambda_T = \inf\{|T'(x)| : x \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j\} > 2.$$

Para $n = 2$ se obtienen las siguientes aplicaciones **agregar foto**

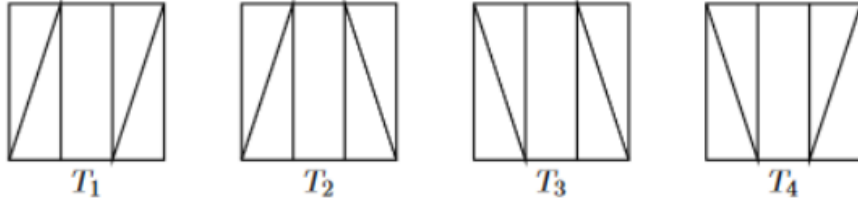


Figura 4: aplicaciones para $n=2$

Se denota por $L(n)$ el conjunto formado por estas 2^n aplicaciones.

Asociado a cada $T \in L(n)$ definimos su conjunto maximal invariante:

$$\Lambda_T = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k} \left(\bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j \right) = \left\{ x \in \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j : T^k(x) \in \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j, \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este conjunto resulta ser un conjunto de Cantor, y consideraremos en él la topología inducida por $[0, 1]$.

Sea

$$\Sigma_n = \{\theta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

el conjunto de sucesiones $\theta = (\theta_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ con $\theta_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Para $x \in \Lambda_T$ se define su itinerario

$$I_T(x) \in \Sigma_n$$

mediante

$$I_T(x)(i) = j \iff T^i(x) \in I_j.$$

La función

$$I_T : \Lambda_T \longrightarrow \Sigma_n$$

es una biyección, esta propiedad se hereda de la biyectividad de T_i para cada I_j . Su inversa viene dada por

$$I_T^{-1}(\theta) = I_{\theta_0} \cap T^{-1}(I_{\theta_1}) \cap T^{-2}(I_{\theta_2}) \cap \dots.$$

Podemos inducir una topología en Σ_n vía I_T :

Un conjunto $U \subset \Sigma_n$ es abierto si y sólo si $I_T^{-1}(U)$ es abierto en Λ_T . Denotaremos por 2_τ esta topología en Σ_n .

Con esta topología, la aplicación

$$I_T : \Lambda_T \rightarrow \Sigma_n$$

es un homeomorfismo.

En Σ_n consideramos la aplicación shift

$$\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$$

definida por

$$\sigma(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots).$$

En la topología definida anteriormente, σ es continua.

Además, usando el homeomorfismo I_T , se puede definir un orden total en Σ_n de la forma:

$$\theta \leq_T \alpha \iff I_T^{-1}(\theta) \leq I_T^{-1}(\alpha) \text{ en } [0, 1].$$

En lo que sigue denotaremos por

$$\Sigma_n(T) = (\Sigma_n, 2_\tau, \leq_T)$$

el espacio topológico compacto ordenado.

Ejemplo 2.7.1

Para $n = 2$ consideremos $\Sigma_2(T_1)$. En este caso se tiene el orden:

$$\underline{0} \leq_{T_1} \underline{0}\underline{1} \leq_{T_1} \underline{1}\underline{0} \leq_{T_1} \underline{1},$$

donde

$$\underline{0} = (0, 0, 0, \dots), \quad \underline{0}\underline{1} = (0, 1, 1, 1, \dots),$$

$$\underline{1}\underline{0} = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad \underline{1} = (1, 1, 1, \dots).$$

$\Sigma_2(T_1)$ es conocido como el espacio lexicográfico, y $\Sigma_2(T_2)$ es llamado el espacio de Milnor-Thurston.

Si en el ejemplo consideramos T_2 en cambio, los límites de los intervalos quedan

$$\underline{0} \leq_{MT} \underline{0}\underline{1}\underline{0} \leq_{MT} \underline{1}\underline{1}\underline{0} \leq_{MT} \underline{1}\underline{0} \tag{10}$$

Teorema 3. Considerando en general para cada $T \in L(n)$, se tiene que $\sigma \circ I_T(x) = I_T \circ I_T(x), \forall x \in \Lambda_T$, esto es, el siguiente diagrama conmuta

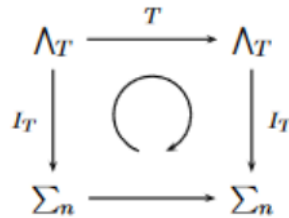


Figura 5: Diagrama conmutativo

$$I_T \circ T = \sigma \circ I_T.$$

Por lo tanto,

$$h_{top}(T|_{\Lambda_T}) = h_{top}(\sigma).$$

Si consideramos un subshift de tipo finito determinado por una matriz de incidencia $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ con $a_{ij} \in \{0, 1\}$, definimos

$$\Sigma(A) = \{\theta \in \Sigma_n : a_{\theta_i \theta_{i+1}} = 1\}.$$

Entonces

$$h_{top}(\sigma|_{\Sigma(A)}) = \log r(A),$$

donde $r(A)$ es el radio espectral de A . (Corolario 7, página 41 en [1])

Definición 37. Una sucesión $\theta \in \Sigma_n(T)$ se dirá *maximal* si ocurre que

$$\sigma^k(\theta) \leq_T \theta$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Una sucesión $\alpha \in \Sigma_n(T)$ se dirá *minimal* si ocurre que

$$\alpha \leq_T \sigma^k(\alpha)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea

$$\text{máx}(T) = \{\theta \in \Sigma_n(T) : \theta \text{ es maximal}\}$$

y

$$\text{mín}(T) = \{\alpha \in \Sigma_n(T) : \alpha \text{ es minimal}\}.$$

Definición 38. Se define el T -mundo como

$$TM = \{(\alpha, \beta) \in \text{mín}(T) \times \text{máx}(T) : \{\alpha, \beta\} \subset \Lambda_T([\alpha, \beta])\};$$

donde

$$\Lambda_T([\alpha, \beta]) = \{\rho \in \Sigma_n : \alpha \leq_T \sigma^i(\rho) \leq_T \beta, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^{-k}([\alpha, \beta]).$$

Ejemplo 4. Para $n = 2$, $T = T_2$, TM se llamará el mundo de Milnor–Thurston y lo denotaremos MTW .

Para cada $T \in L(n)$ podemos definir $H : TM \rightarrow [0, \log(n)]$ como

$$H(\alpha, \beta) = h_{top}(\sigma|_{\Lambda_T([\alpha, \beta])}).$$

Sea $\theta \in \text{máx}(T_2)$ una órbita periódica tal que $\theta_0 = 1$. Asociado a θ tenemos el conjunto

$$B_n(\theta) = \{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \mid \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \text{ ocurre como } \rho_0 \dots \rho_{n-1} \text{ para algún } \rho \in \Lambda_{T_2}(\theta)\}.$$

Aquí

$$\Lambda_{T_2}(\theta) = \{\xi \in \Sigma_2 \mid \sigma(\theta) \leq_{T_2} \sigma^i(\xi) \leq_{T_2} \theta, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Es claro que $\Lambda_{T_2}(\theta)$ es cerrado e invariante por σ .

Teorema 4.

$$h_{\text{top}}(\theta) = h_{\text{top}}\left(\sigma \mid_{\Lambda_{T_2}(\theta)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|B_n(\theta)|).$$

Aquí $|B_n(\theta)|$ es la cardinalidad de $B_n(\theta)$. (Teorema 6, página 38 de [1])

Nota: Se puede probar el resultado anterior para el caso de subshifts de tipo finito de

$$\Sigma_n(\mathbb{N}) = \{\theta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

3. Presentación de $f_{\mu,\nu}(x)$ y análisis de puntos fijos

Consideremos la familia de funciones a dos parámetros, conocida como la familia cuadrática de Lorenz

$$f_{\mu,\nu}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

con la siguiente regla de asignación.

$$f_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \nu - x^2 & \text{si } x < 0 \\ \mu - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

Esta función es una cuadrática cóncava "partida por la mitad", que corta con su "vértice." ^{en} μ por los positivos y ν por los negativos. El cómo se cambian de tramo los puntos y cómo viajan de uno a otro es lo que le da la riqueza a esta simple función.

3.1. Puntos fijos para el tramo negativo de $f_{\mu,\nu}(x)$

Si $x < 0$, entonces $f_{\mu,\nu}(x) = \nu - x^2$.

Buscamos entonces un $x(\nu)$ que sea punto fijo para este tramo:

$$x(\nu) = \nu - x(\nu)^2$$

Resolviendo la ecuación anterior, tenemos dos soluciones:

$$\begin{aligned} x_-(\nu) &= \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2} \\ x_+(\nu) &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Consideraremos a continuación las condiciones que imponen las raíces, junto a que $x < 0$ para ver cuándo estas soluciones para la ecuación son en efecto un punto fijo.

3.1.1. $1 + 4\nu < 0$

Para estos valores de ν , tenemos que $1 + 4\nu < 0$, por lo que $x_+(\nu)$, $x_-(\nu)$ no son valores reales y no pueden ser puntos fijos.

3.1.2. $0 < 1 + 4\nu < 1$

En este tramo de ν , $0 < \sqrt{1 + 4\nu} < 1$, por lo que $x_+(\nu)$, $x_-(\nu) \in \mathbb{R}$. En particular $x_+(\nu)$, $x_-(\nu) < 0$. Entonces ambos son puntos fijos para este tramo de ν .

A partir de las condiciones de ν , acotamos su derivada en el tramo negativo de $f_{\mu,\nu}$ para los puntos fijos:

Si $x < 0$, se tiene $\frac{d}{dx}f_{\mu,\nu}(x) = -2x$, entonces

$$\left| \frac{d}{dx}f_{\mu,\nu}(x) \right|_{x=x_-(\nu)} = -2x_-(\nu) = 1 + \sqrt{1+4\nu}, \quad \text{y tenemos}$$

$$1 < 1 + \sqrt{1+4\nu} < 2$$

$$1 < \left| \frac{d}{dx}f_{\mu,\nu}(x) \right|_{x=x_-(\nu)} < 2$$

Es decir, $x_-(\nu)$ es un punto fijo repulsor.

Para el otro punto fijo, de manera análoga:

$$\left| \frac{d}{dx}f_{\mu,\nu}(x) \right|_{x=x_+(\nu)} = -2x_+(\nu) = 1 - \sqrt{1+4\nu}$$

$$0 < 1 - \sqrt{1+4\nu} < 1$$

$$\left| \frac{d}{dx}f_{\mu,\nu}(x) \right|_{x=x_+(\nu)} < 1$$

Osea que $x_+(\nu)$ es un punto fijo atractor.

Considerando la aparición de $x_+(\nu)$, $x_-(\nu)$, atractor y repulsor respectivamente, se tiene que en $\nu = -\frac{1}{4}$ hay una bifurcación de tipo silla-nodo.

3.1.3. $\nu > 0$

Descartamos que $x_+(\nu)$ sea punto fijo para este caso, ya que $x_+(\nu) > 0$, por lo que no es evaluable en el tramo negativo de $f_{\mu,\nu}$.

Para el otro punto fijo, $x_-(\nu) < 0$ para cualquier $\nu > 0$, por lo que cumple las condiciones para ser punto fijo.

Si miramos su derivada:

$$\frac{d}{dx}f_{\mu,\nu}(x_-(\nu)) = -2x_-(\nu) = 1 + \sqrt{1+4\nu} > 2$$

Concluimos que $x_-(\nu)$ es un punto fijo repulsor para $\nu > 0$.

3.2. Puntos fijos para el tramo positivo de $f_{\mu,\nu}(x)$

Si $x > 0$, $f_{\mu,\nu} = \mu - x^2$.

En este caso buscaremos un $x(\mu)$ que sea punto fijo, es decir que resuelva

$$x(\mu) = \mu - x(\mu)^2$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$x_-(\mu) = \frac{-1 - \sqrt{1+4\mu}}{2}$$

$$x_+(\mu) = \frac{-1 + \sqrt{1+4\mu}}{2}$$

Al igual que en el análisis anterior, identificaremos las condiciones para las cuales los candidatos $x_-(\mu)$, $x_+(\mu)$ sean en efecto puntos fijos.

3.2.1. $\mu < -\frac{1}{4}$

Para estos valores de μ , se tiene $1 + 4\mu < 0$. De esta manera $x_-(\mu), x_+(\mu)$ no tienen valor real y no pueden ser puntos fijos.

3.2.2. $-\frac{1}{4} < \mu < 0$

Si el parámetro se encuentra en este rango, $x_-(\mu), x_+(\mu)$ alcanzan un valor real, pero negativos, por lo que no pueden ser puntos fijos para $x > 0$.

3.2.3. $0 < \mu < \frac{3}{4}$

A partir de este tramo y mientras μ siga creciendo, $x_-(\mu) < 0$, por lo que no puede ser punto fijo.

Por otro lado, $\sqrt{1 + 4\mu} > 1$. Por tanto $x_+(\mu)$ es punto fijo, y si armamos su derivada con las condiciones impuestas

$$\begin{aligned} 0 < \mu < \frac{3}{4} \\ 0 < 4\mu < 3 \\ 1 < 1 + 4\mu < 4 \\ 1 < \sqrt{1 + 4\mu} < 2 \\ -2 < -\sqrt{1 + 4\mu} < -1 \\ -1 < 1 - \sqrt{1 + 4\mu} < 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$-1 < \frac{d}{dx} f_{\mu,\nu}(x)|_{x=x_+(\mu)} < 0$$

Podemos concluir que, $x_+(\mu)$ es un punto fijo atractor.

3.2.4. $\mu > \frac{3}{4}$

Notemos que si

$$\frac{3}{4} < \mu$$

Entonces

$$4 < 1 + 4\mu$$

Terminando de formar la derivada

$$1 - \sqrt{1 + 4\mu} < -1$$

Entonces

$$\frac{d}{dx} f_{\mu,\nu}(x)|_{x=x_+(\mu)} < -1$$

Por lo que $x_+(\mu)$ se comporta como repulsor.

El cambio de comportamiento de $x_+(\mu)$ en los últimos casos localiza una bifurcación de tipo flip en $\mu = \frac{3}{4}$. Se probará la naturaleza dobla periodo de este punto más adelante.

4. Dinámica de la familia $f_{\mu,\nu}(x)$

En este análisis, estudiaremos las dinámicas existentes en esta familia fijando distintos valores del parámetro ν e iremos describiendo el comportamiento límite del intervalo vía $f_{\mu,\nu}$ a medida que crece μ .

Además, agregaremos el comportamiento y las curvas de bifurcación (si corresponden) al espacio de parámetros al final de cada sección.

Se indicará para cada caso el nombre que recibe la zona de el espacio de parámetros

4.1. Zona A, $\nu < -\frac{1}{4}$

Como anunciamos anteriormente y como una permanente en la zona A, $x_-(\nu), x_+(\nu)$ **no** son puntos fijos.

4.1.1. Zona A_1 , $\mu < 0$

Notemos que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f^n(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando, } n \rightarrow \infty$$

Consideramos a $-\infty$ como único atractor en este caso.

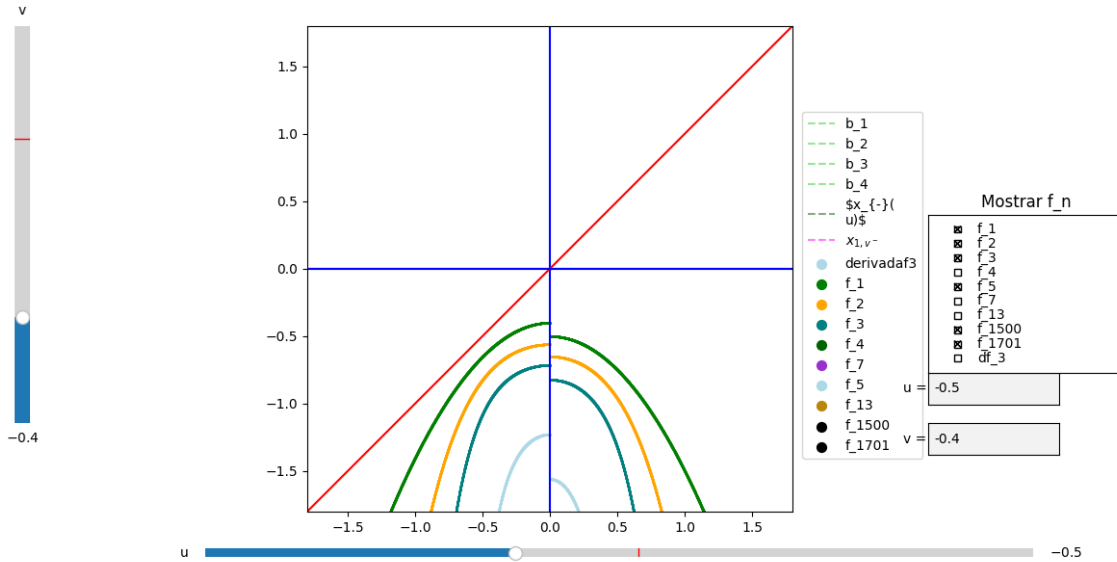


Figura 6: Caso en la Zona A_1

4.1.2. Zona A_2 , $0 < \mu < \frac{3}{4}$

Tan pronto μ tome valores positivos, existe el punto fijo $x_+(\mu)$, que en este caso es un atractor.

De esta manera

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (0, \sqrt{\mu})$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$
- Si $x \in (\sqrt{\mu}, \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

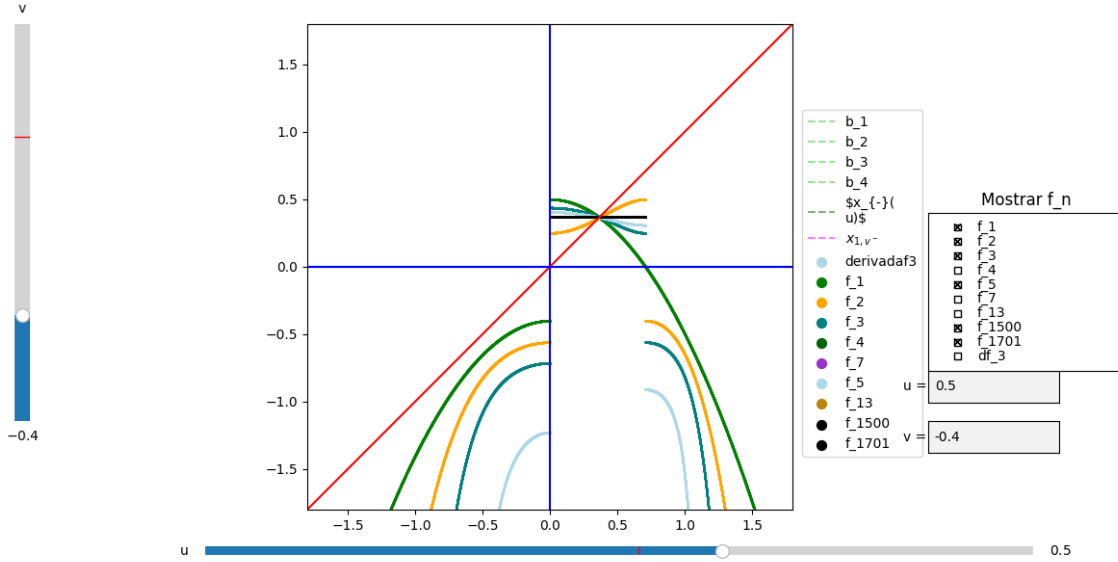


Figura 7: Caso en la Zona A_2

4.1.3. Zona A_3 , $\frac{3}{4} < \mu < 1$

Como mencionamos anteriormente, hay una bifurcación de tipo flip en $\mu = \frac{3}{4}$, por lo que se genera una órbita atractora de orden 2 para estos valores de μ

Es fácil ver que el tramo negativo de ν no tiene imágenes positivas, de esta manera, $f_\nu(f_\mu(x))$ no puede tener puntos fijos (esta composición recibe reales positivos y entrega negativos).

Notando que $f_\nu^n(x) \rightarrow -\infty$ para cualquier $x < 0$, se desprende que $f_\nu^{2n}(x) \rightarrow -\infty$. La composición $f_\mu(f_\nu(x))$ no tiene sentido, ya que $f_\nu \in \mathbb{R}^-$

Miremos entonces $f_\mu(f_\mu(x)) = \mu - (\mu - x^2)^2$, y busquemos sus puntos fijos:

$$\mu - (\mu - x^2)^2 = x \iff x^4 - 2\mu x^2 + x - \mu + \mu^2 = 0$$

Antes vimos que $x_+(\mu)$ es punto fijo de f en este tramo:

$$f_u(x_+(\mu)) = x_+(\mu), \quad \text{entonces}$$

$$(x_+(\mu))^2 + x_+(\mu) - \mu = 0$$

De esta manera, $\mu - x^2$ debe ser raíz de $f_\mu(f_\mu(x)) - x$, por lo que $x^2 + x - \mu$ divide a $f_\mu(f_\mu(x))$.

Factorizando:

$$x^4 - 2\mu x + x + \mu^2 - \mu = (x^2 + x - \mu)(x^2 - x + 1 - \mu)$$

En la primera parte, analizamos los ceros del primer factor:

Son los puntos fijos de f_μ , $x_-(\mu)$ y $x_+(\mu)$

Los ceros del segundo factor son

$$x_+^2(\mu) = \frac{1 + \sqrt{4\mu - 3}}{2}, \quad x_-^2(\mu) = \frac{1 - \sqrt{4\mu - 3}}{2}$$

Notemos que cumplen

- $f_\mu(x_+^2(\mu)) = x_-^2(\mu)$
- $f_\mu(x_-^2(\mu)) = x_+^2(\mu)$
- $f_\mu(x_\pm^2(\mu)) = x_\mp^2(\mu)$

Averiguemos ahora la naturaleza de estos puntos fijos calculando la derivada:

$$\frac{df_\mu(f_\mu(x))}{dx} = -4x^3 + 4\mu x = 4x(\mu - x^2)$$

Evaluando en $x_\pm^2(\mu)$:

$$\frac{df_\mu(f_\mu(x_\pm^2(\mu)))}{dx} = 4(1 - \mu)$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &< \mu < 1 \\ \frac{-3}{4} &> -\mu > -1 \\ \frac{1}{4} &> 1 - \mu > 0 \end{aligned}$$

$$1 > 4(1 - \mu) > 0, \iff 0 < \frac{df_\mu(f_\mu(x))}{dx} \Big|_{x=x_\pm^2(\mu)} < 1$$

Concluimos que $x_+^2(\mu)$ y $x_-^2(\mu)$ forman una órbita atractora de orden 2 para f_μ .

Describimos entonces el comportamiento límite del intervalo:

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (0, \sqrt{\mu}) - \{x_+(u)\}$, $f^n(x) \rightarrow \{x_+^2(\mu), x_-^2(\mu)\}$
- Si $x \in (\sqrt{\mu}, \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

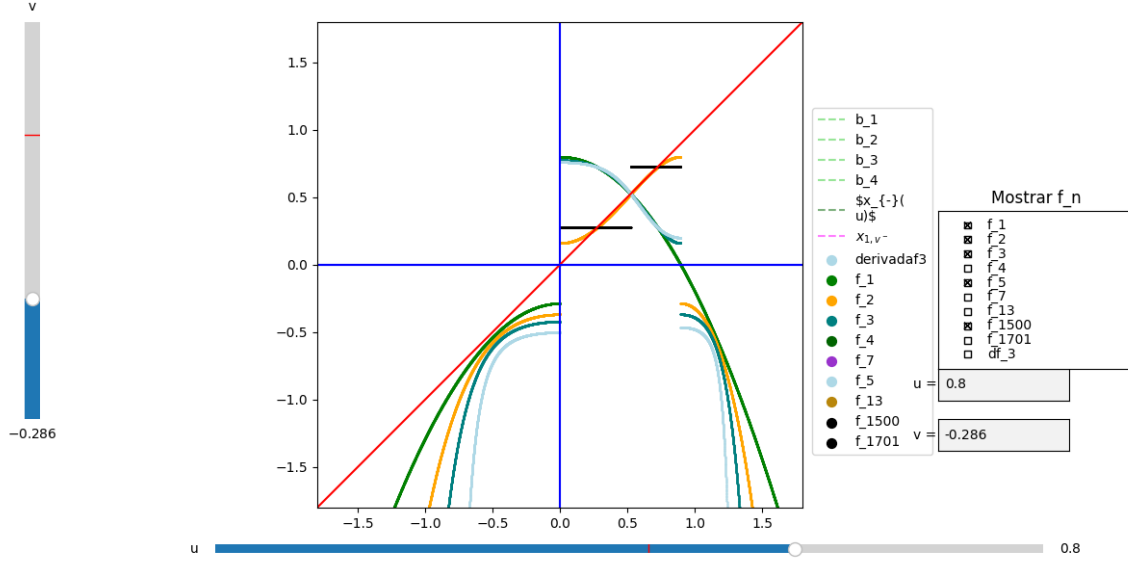


Figura 8: Caso en la Zona A_3

4.1.4. Zona A_4 , $\mu > 1$

Analicemos qué ocurre con la órbita atractora para este tramo de μ

$$\text{Si } \mu > 1 > \frac{3}{4} \implies x_+^2(\mu) = \frac{1 + \sqrt{4\mu - 3}}{2} > 0$$

El otro atractor de periodo 2, $x_-^2(\mu) < 0$ cuando $\mu > 1$, entonces

$$f_{\mu, \nu}(x_-^2(\mu)) = \nu - (x_-^2(\mu))^2 \in \mathbb{R}^-, \quad \forall \nu < -\frac{1}{4}$$

De esta manera $f_{\mu, \nu}(x_-^2(\mu)) \neq x_+^2(\mu)$. Estos puntos no están conectados vía $f_\mu(f_\mu)$, por lo que el caracter atractor de la órbita $\{x_-^2(\mu), x_+^2(\mu)\}$ se pierde cuando $\mu > 1$, y $\nu < -\frac{1}{4}$.

Entonces, a excepción de el punto fijo $x_+(u)$, todo punto convergerá al atractor $-\infty$:

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (0, \sqrt{\mu}) - \{x_+(u)\}$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$ o $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = 0$
- Si $x \in (\sqrt{\mu}, \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

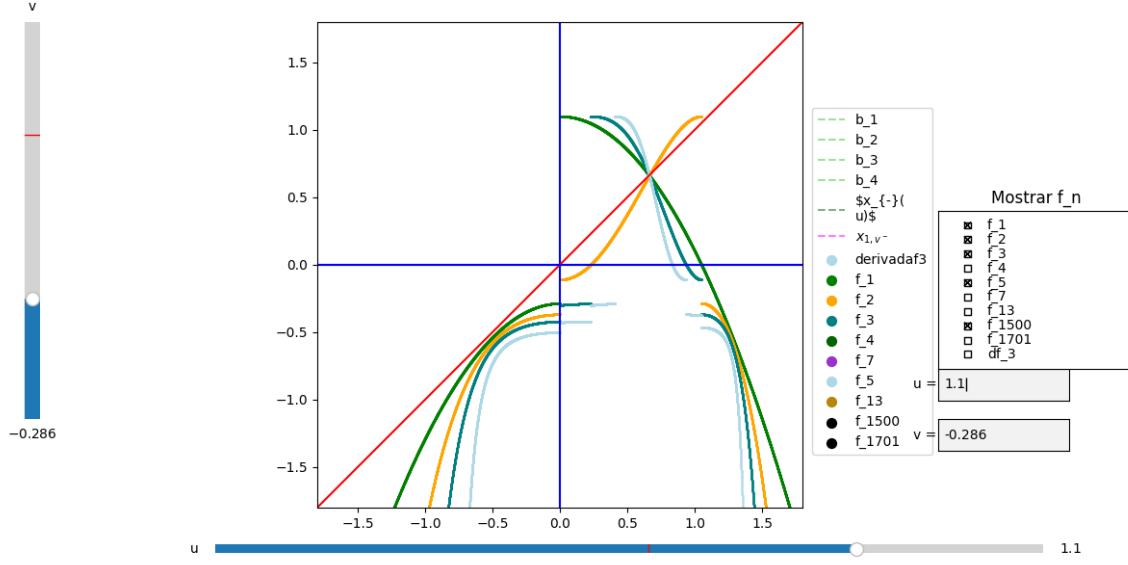


Figura 9: Caso en la Zona A_4

Mostramos ahora el espacio de parámetros (μ, ν) y achuramos la zona A.

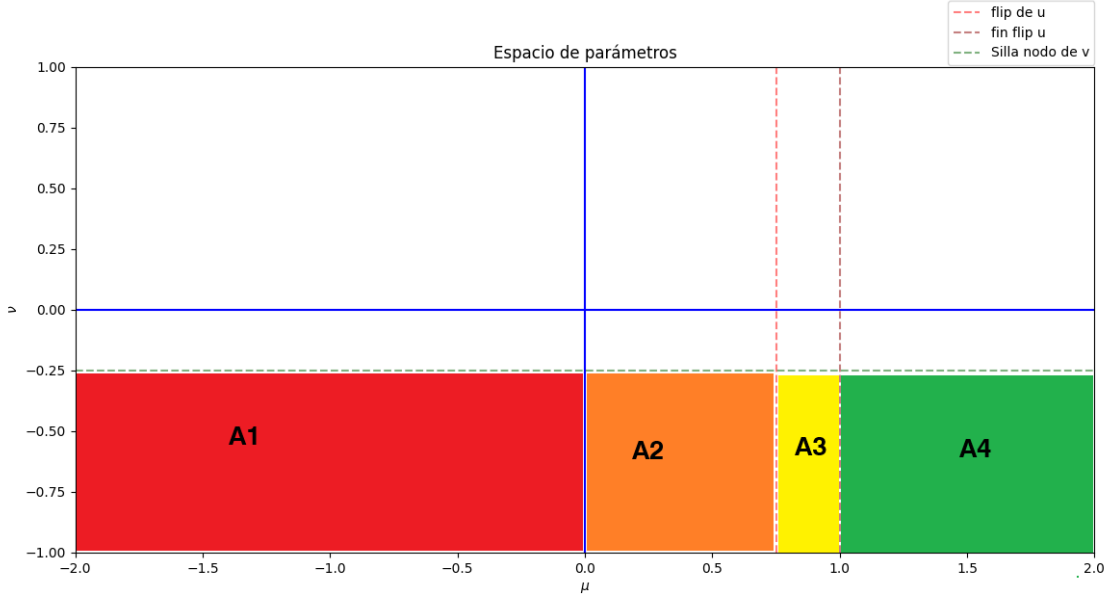


Figura 10: Espacio de parámetros con las distintas zonas descritas por las condiciones $A = A_i$

4.2. Zona B, $-\frac{1}{4} \leq \nu < 0$

Para $\nu = -\frac{1}{4}$, se produce una bifurcación tipo Silla-nodo. Si ν toma este valor, existen ahora $x_-(\nu), x_+(\nu)$ a la vez, y cumplen $x_-(\nu) = x_+(\nu) = -\frac{1}{2}$. Es un punto fijo que se comporta como repulsor a la izquierda de $x_-(\nu)$ (menor a $x_-(\nu)$) y como

atractor para la derecha de $x_+(\nu)$ (mayor a $x_+(\nu)$).

Para $-\frac{1}{4} < \nu < 0$, $x_-(\nu)$ es un punto fijo repulsor de f_ν y $x_+(\nu)$ es un punto fijo atractor de f_ν . En este caso $x_-(\nu) \neq x_+(\nu)$

En general $x_-(\nu) \leq x_+(\nu)$ para $-\frac{1}{4} < \nu < 0$.

4.2.1. Zona B_1 , $\mu < x_-(\nu)$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu))$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (0, \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

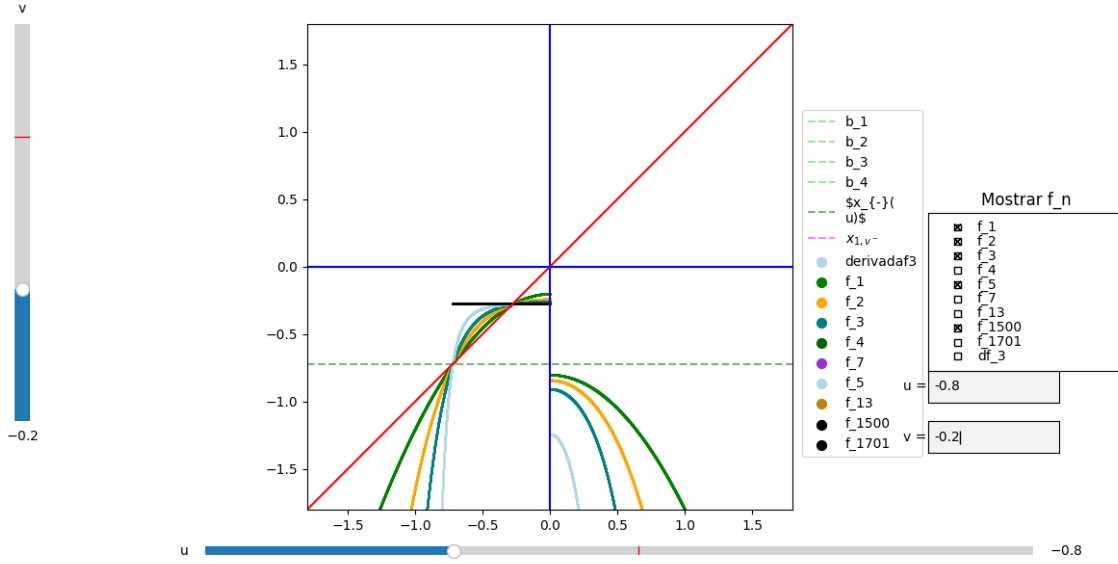


Figura 11: Caso en la Zona B_1

4.2.2. Zona B_2 , $x_-(\nu) < \mu < 0$ (ver figura 7)

Sea $\bar{x}(\mu, \nu) > 0$, tal que $f_\mu(\bar{x}(\mu, \nu)) = x_-(\nu)$, a saber

$$\mu - \bar{x}^2(\mu, \nu) = x_-(\nu) \implies \bar{x}(\mu, \nu) = \sqrt{\mu - x_-(\nu)}$$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu))$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (0, \bar{x}(\mu, \nu))$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

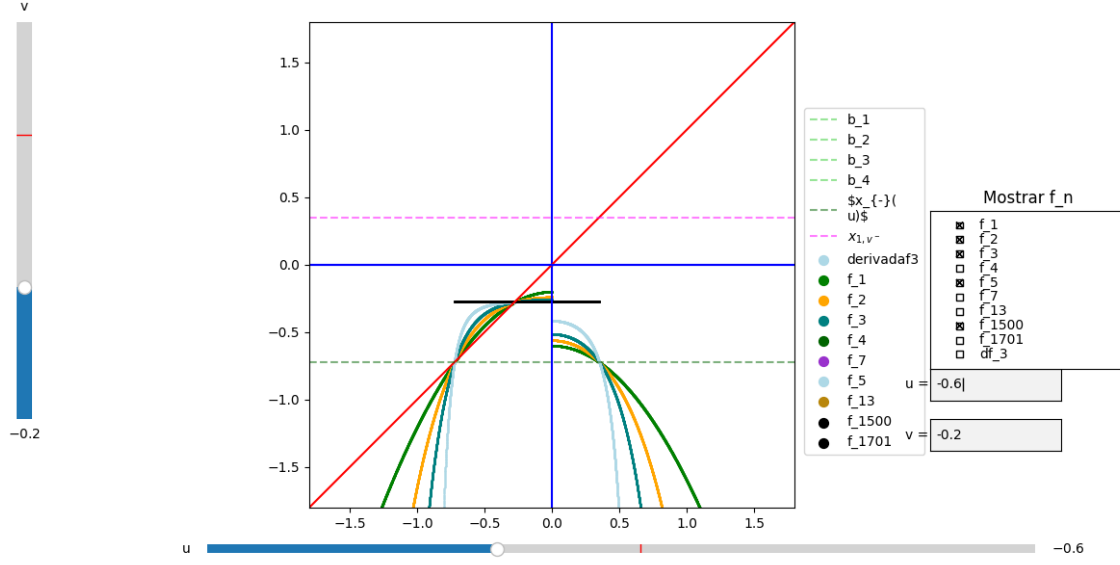


Figura 12: Caso en la Zona B_2

4.2.3. Zona B_3 , $0 < \mu < \frac{3}{4}$

Hemos visto antes que para este intervalo del parámetro μ , existe el atractor $x_+(\mu)$. Contando el punto fijo que nos proporcionaba el otro tramo de la función, $x_-(\nu)$, notemos que para estos valores del parámetro, $f_{\mu,\nu}$ tiene dos atractores. De esta manera se tiene que

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu))$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (0, \sqrt{\mu})$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$
- Si $x \in (\sqrt{\mu}, \bar{x}(\mu, \nu))$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

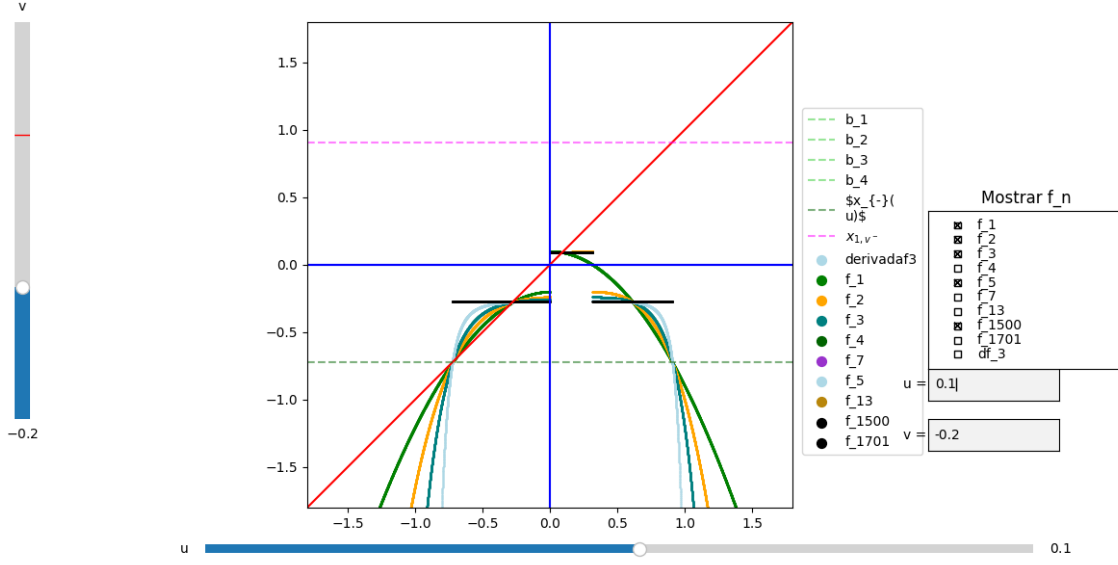


Figura 13: Caso en la Zona B_3

4.2.4. Zona B_4 , $\frac{3}{4} < \mu < 1$

En este tramo, el punto fijo $x_+(\mu)$ se transforma en repulsor, y los puntos que eran atraídos por él son ahora atrapados por la órbita de orden 2 : $\{x_+^2(\mu), x_-^2(\mu)\}$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu))$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (0, \sqrt{\mu}) - \{x_+(u)\}$, $f^n(x) \rightarrow \{x_+^2(\mu), x_-^2(\mu)\}$
- Si $x \in (\sqrt{\mu}, \bar{x}(\mu, \nu))$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$

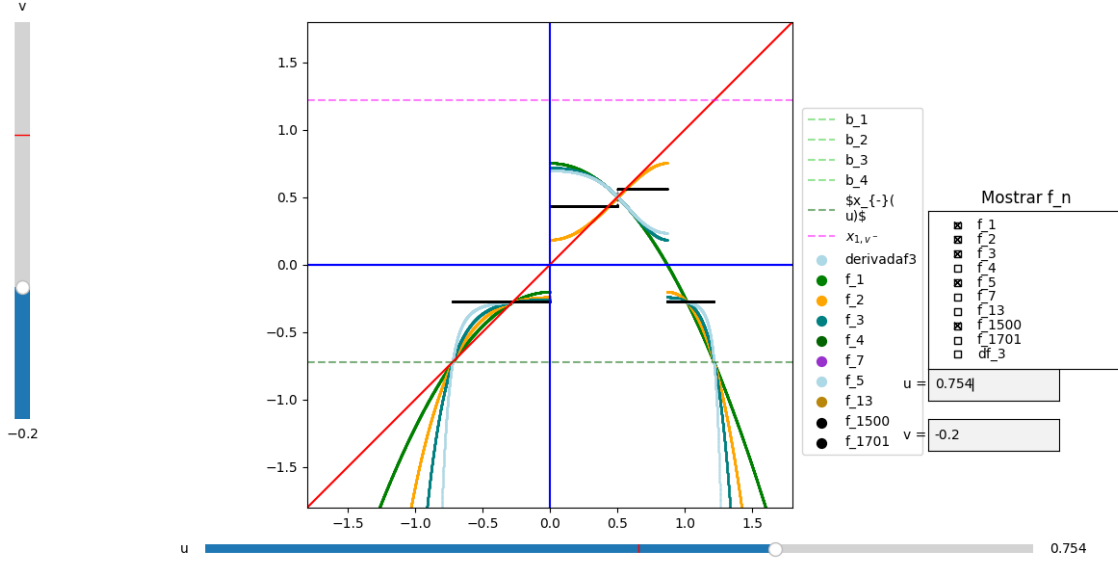


Figura 14: Caso en la Zona B_4

Para $\mu > 1$, recordando que $\bar{x}(\mu, \nu)$ es el punto que cumple ser la preimagen positiva de $x_-(\nu)$:

$$f_\mu(\bar{x}(\mu, \nu)) = \mu - (\bar{x}(\mu, \nu))^2 = x_-(\nu)$$

Estudiaremos cuando μ toma el mismo valor que $\bar{x}(\mu, \nu)$. Al considerar esta condición, buscamos una curva que permita expresar μ en función de ν :

Tenemos

$$\mu = \bar{x}(\mu, \nu) = \sqrt{\mu - x_-(\nu)}$$

Entonces,

$$\mu^2 = \mu - x_-(\nu)$$

Esto es

$$\mu^2 = \mu + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$$

Reordenando

$$\mu^2 - \mu + x_-(\nu) = 0$$

Resolviendo la cuadrática para μ :

$$\mu = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x_-(\nu)}}{2}$$

La solución negativa para μ no tiene sentido. Así, consideramos

$$\mu_f(\nu) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x_-(\nu)}}{2}$$

Notemos que esta curva creciente existe para $\nu \geq -\frac{1}{4}$, y que $\mu_f(-\frac{1}{4}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$. Además, recordamos que para $\mu > 1$, se pierde la órbita atractora de orden 2.

Así, en la zona B_4 , $f_{\mu,\nu}$ tiene un punto fijo atractor, $x_-(\nu) < 0$ y una órbita atractora positiva. Por ahora graficaremos la curva como un separador de las zonas. Más adelante se ve la curva completa en el espacio de parámetros.

4.2.5. Zona B_5 , $1 < \mu < \mu_f(\nu)$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in (0, \bar{x}(\mu, \nu)) - \{x_+(\mu)\}$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$ o $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = 0$

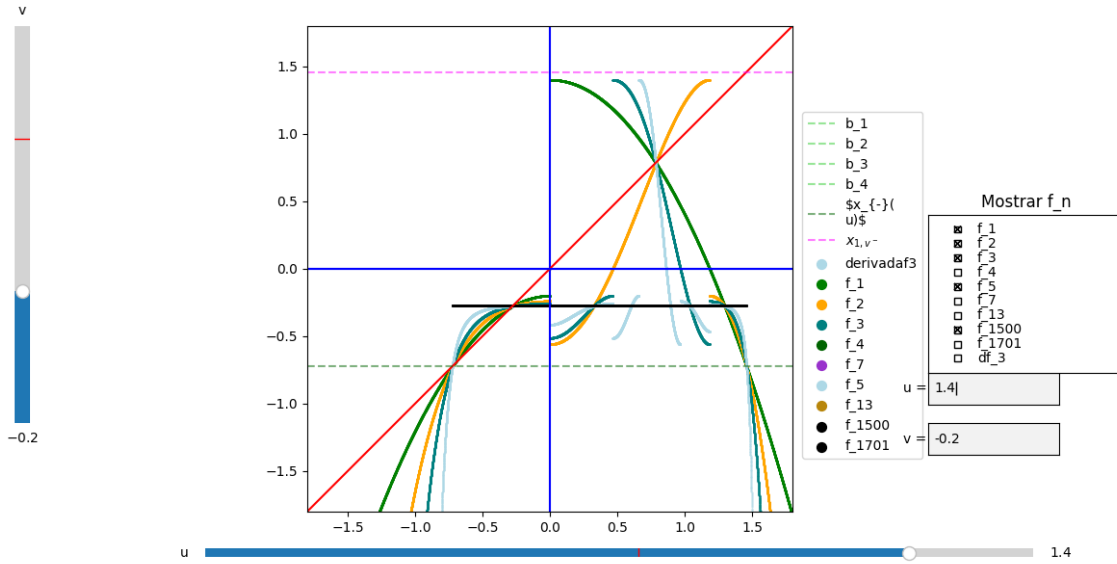


Figura 15: Caso en la Zona B_5

Observemos también lo que ocurre cuando $\mu = \bar{x}(\mu, \nu)$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), \bar{x}(\mu, \nu)) - \{x_+(u)\}$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$ o $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = 0$

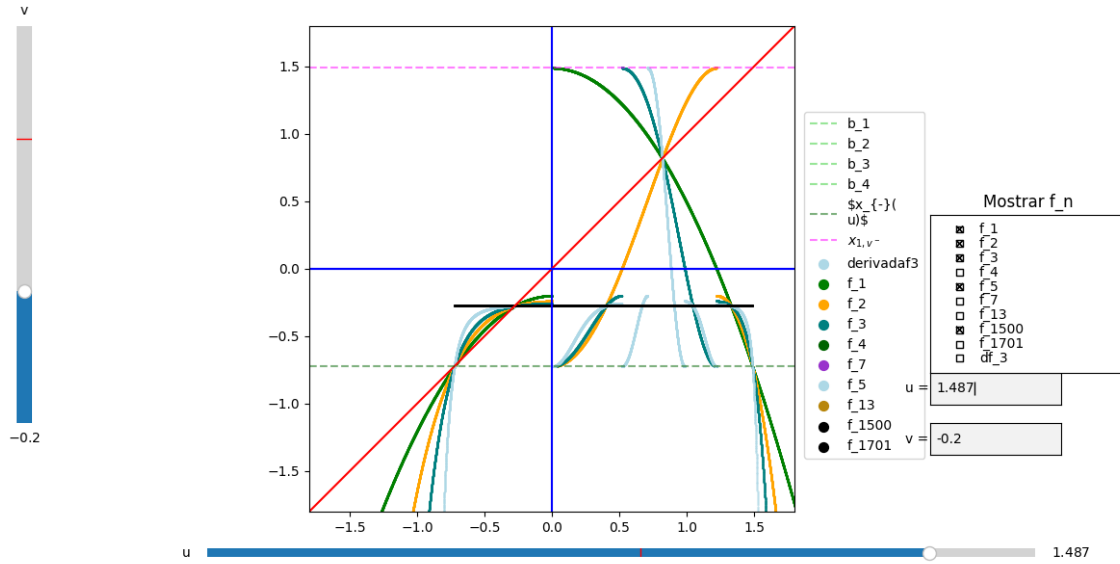


Figura 16: Caso especial $\mu = \bar{x}(\mu, \nu)$

4.2.6. Zona B_6 , $\mu > \mu_f(\nu)$:

Para esta sección, definimos $\bar{x}_2(\mu, \nu)$ tal que $f_\mu(\bar{x}_2(\mu, \nu)) = \bar{x}(\mu, \nu)$.
 Notar que $0 < \bar{x}_2(\mu, \nu) < x_+(\mu)$ Cuando se necesiten, las preimágenes de orden mayor, serán definidas recursivamente $f_\mu(\bar{x}_i(\mu, \nu)) = \bar{x}_{i-1}(\mu, \nu)$ para $i \in \mathbb{N}$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- Si $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f_{\mu, \nu}^{-i}(0, \bar{x}_2(\mu, \nu))$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in \bigcup_{j=0}^{\infty} f_{\mu, \nu}^{-j}(x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\nu)$
- $x_+(\mu)$ es punto fijo.
- Como en casos anteriores, hay preimágenes de repulsores entre los intervalos. Si x no satisface una de las condiciones anteriores, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = 0$, o $f^n(x) = x_-(\nu)$

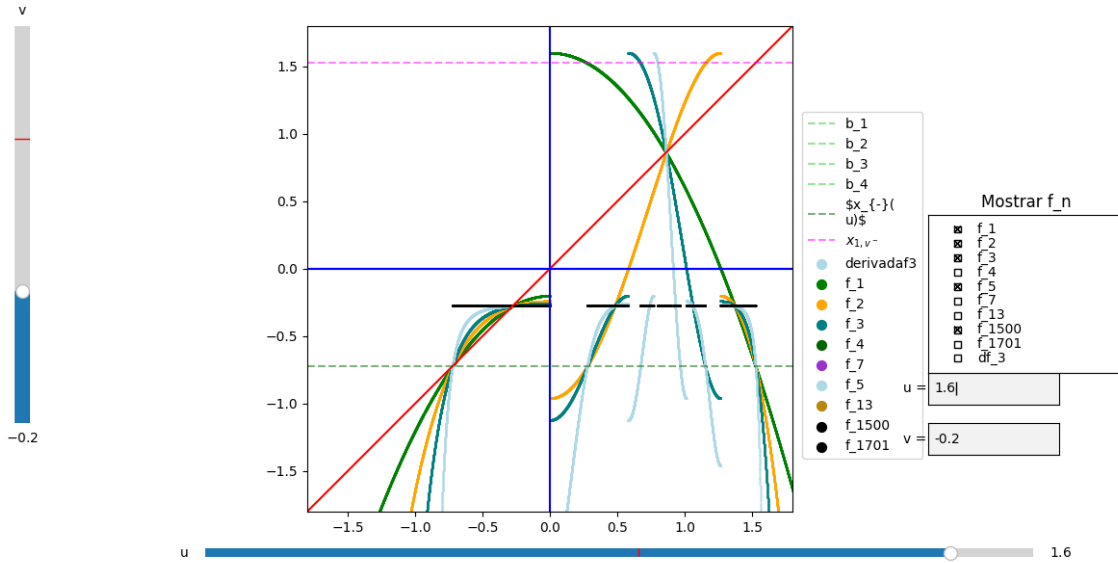


Figura 17: Caso en la Zona B_6

Agregamos a nuestro espacio de parámetros la zona B, achurando las agregadas en la última sección:

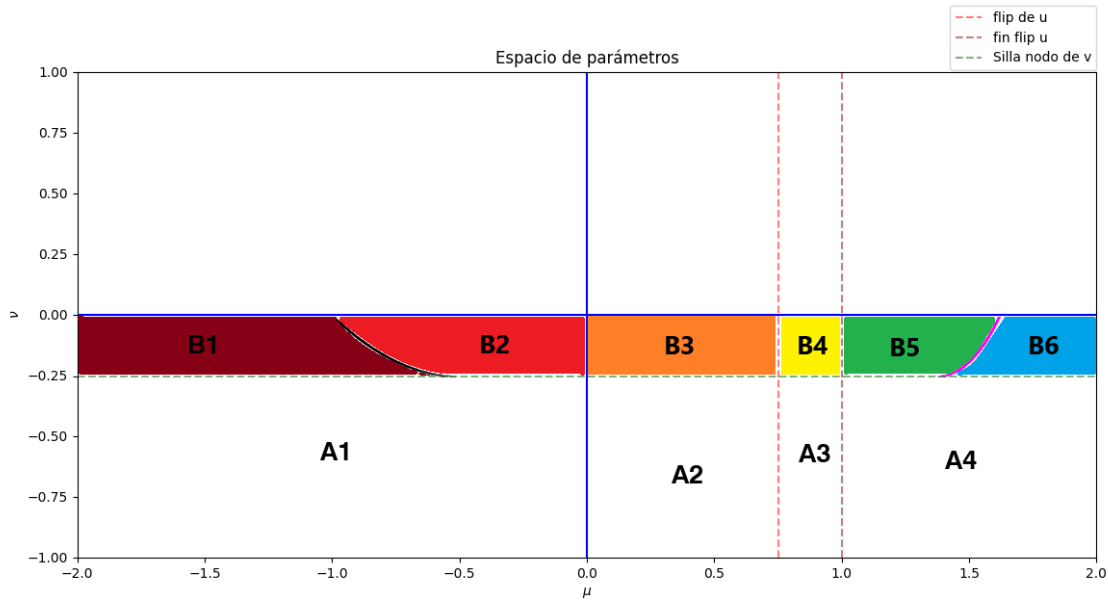


Figura 18: Espacio de parámetros con las distintas zonas B

4.3. Zona C , $0 < \nu < 1$

A medida que se modifican los parámetros, las bifurcaciones ocurren cuando se definen (o se indefinen) preimágenes del 0.

Esto ocurre porque la órbita de un elemento cambia de tramo(o comienza a/deja de existir) para alguna iteración.

Este tipo de bifurcaciones ocurre rápidamente en particular cuando ambos parámetros son positivos(de manera más marcada aún cuando ambos parámetros son mayores que 1), lo que aumenta en riqueza el estudio de la dinámica producida por la función.

4.3.1. Zona C_1 $\mu < x_-(\nu)$

Para este caso, tenemos el repulsor $x_-(\nu)$, quien empuja al tramo $(x_-(\nu), 0)$ al tramo $(0, \infty)$. Este tramo a su vez es enviado vía f a $(-\infty, x_-(\nu))$, elementos que bajo iteraciones de f decrecen hacia $-\infty$ rápidamente.

Entonces, se tiene que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_-(\nu)\}, f^n(x) \rightarrow -\infty < \text{ o } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n(x) = 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$

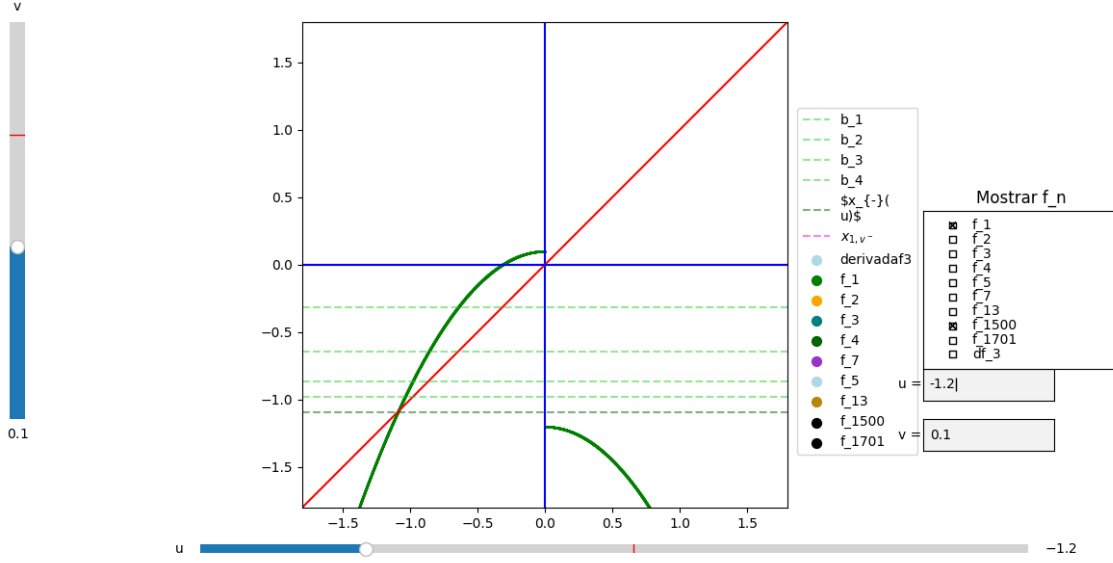


Figura 19: Caso en la Zona C_1

4.3.2. Zona C_2 $x_-(\nu) < \mu < 0$

Durante el análisis previo hemos estado estudiando los casos a medida que crece μ . Sin embargo, creo que en este caso vale la pena estudiar cómo cambia la dinámica a medida que μ va de 0 a $x_-(\nu)$:

Comencemos considerando la sucesión de preimágenes negativas del 0, b_i , que cumplen:

$$b_i < 0,$$

$$f_{\mu, \nu}(b_1) = 0,$$

$$\nu - (b_1)^2 = 0,$$

Considerando que $b_1 < 0$, $\nu > 0$, tenemos

$$b_1 = -\sqrt{\nu}$$

$$f_{\nu}(b_{i-1}) = b_i,$$

$$b_2 = -\sqrt{\nu + \sqrt{\nu}}$$

$$b_3 = -\sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu}}}$$

$$\vdots$$

$$b_i = -\sqrt{\nu - b_{i-1}}$$

Sea

$$G_1(\mu, \nu, x) = f_{\nu}(f_{\mu}(x)) - x, \text{ definida para } b_1 < \mu < 0$$

Y en general

$$G_i(\mu, \nu, x) = f_{\nu}^i(f_{\mu}(x)) - x \text{ definida para } b_i < \mu < b_{i-1}, i \geq 2$$

Consideremos

$$\begin{aligned} q_1(\mu) &= G_1(\mu, \nu, 0) \\ q_1(\mu) &= f_{\mu, \nu, -, +}(0) - 0 \\ &= \nu - \mu^2 \end{aligned}$$

De manera global

$$q_i(\mu) = G_i(\mu, \nu, 0), \quad i \geq 2$$

Como una familia de polinomios en función de μ . Se tiene, por construcción que para $\mu = b_i(\nu)$

$$q_i(b_i) = 0, \implies G_i(b_i, \nu, 0) = 0$$

Además, podemos decir sobre su derivada que

$$\frac{dG_i(b_i, \nu, 0)}{dx} = \frac{df_{b_i, \nu, (-)^i, +}(0)}{dx} - 1$$

Por regla de la cadena aplicada en repetidas ocasiones, tenemos que para una función iterada g , su derivada cumple

$$\frac{dg^n(x)}{dx} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{dg(g^k(x))}{dx}$$

En particular para nuestra función, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{df_{\mu, \nu}^n(x)}{dx} &= \prod_{k=0}^{n-1} (-2) f_{\mu, \nu}^k(x) \\ \frac{df_{\mu, \nu}^n(x)}{dx} &= (-2)^n \prod_{k=0}^{n-1} f_{\mu, \nu}^k(x) \end{aligned}$$

Aplicando estos resultados para nuestra función G_i , tenemos que

$$\frac{dG_i(b_i, \nu, 0)}{dx} = (-2)^i \prod_{k=0}^{i-1} f_{b_i, \nu}^k(0) - 1$$

Reordenando, considerando que

$$\begin{aligned} f_{\mu, \nu}^0(x) &= x \implies \\ (-2)^i \prod_{k=1}^{n-1} (f_{b_i, \nu}^k(0)) \cdot 0 &= 0 \\ \frac{dG_i(b_i, \nu, 0)}{dx} &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Podemos aplicar entonces, el teorema de la función implícita para cada G_i alrededor del punto $(b_i, \nu, 0)$ correspondiente.

Esto nos entrega una familia de soluciones $p_i(\mu, \nu)$ asociadas a cada G_i tal que

$$G_i(\mu, \nu, p_i(\mu, \nu)) = 0$$

en una vecindad de $(\mu, \nu) \sim (b_i, \nu)$, $b_i < \mu < b_{i-1}$, $i \geq 2$

Este punto $p_i(\mu, \nu)$ es fijo para $f_{\mu, \nu, (-)^i, +}(x) = f_v^i(f_\mu(x))$, que es en particular punto de periodo $i + 1$ para $f_{\mu, \nu}$. A partir de esto, afirmamos lo siguiente:

Si $b_1 < \mu < 0$, entonces $f_{\mu, \nu}$ tiene un punto de periodo 2.

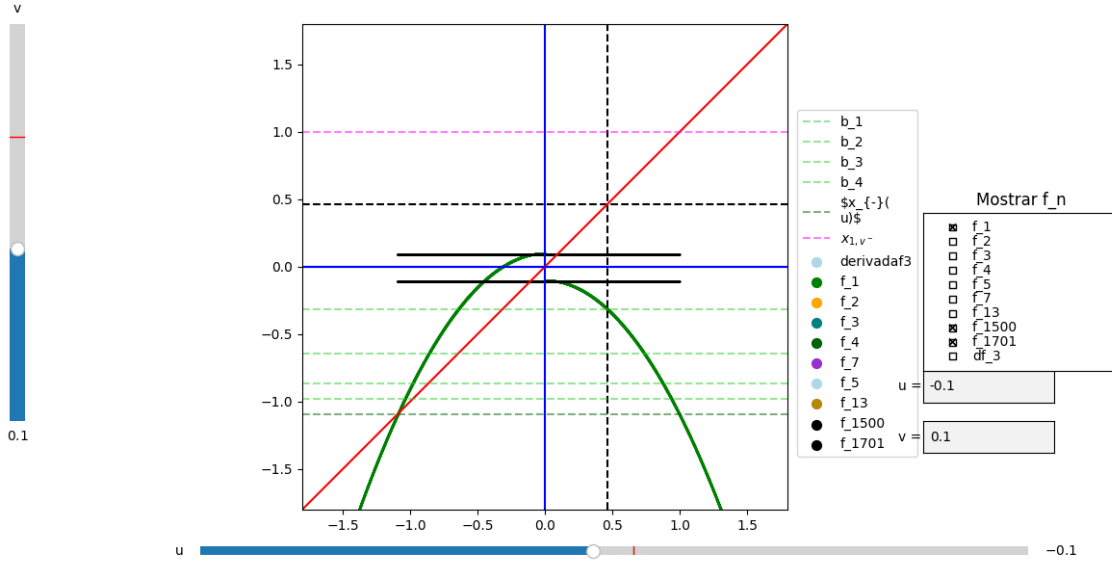


Figura 20: Ejemplo de periodo 2 para $\mu \in (b_1, 0)$

Si $b_2 < \mu < b_1$, entonces $f_{\mu, \nu}$ tiene un punto de periodo 3.

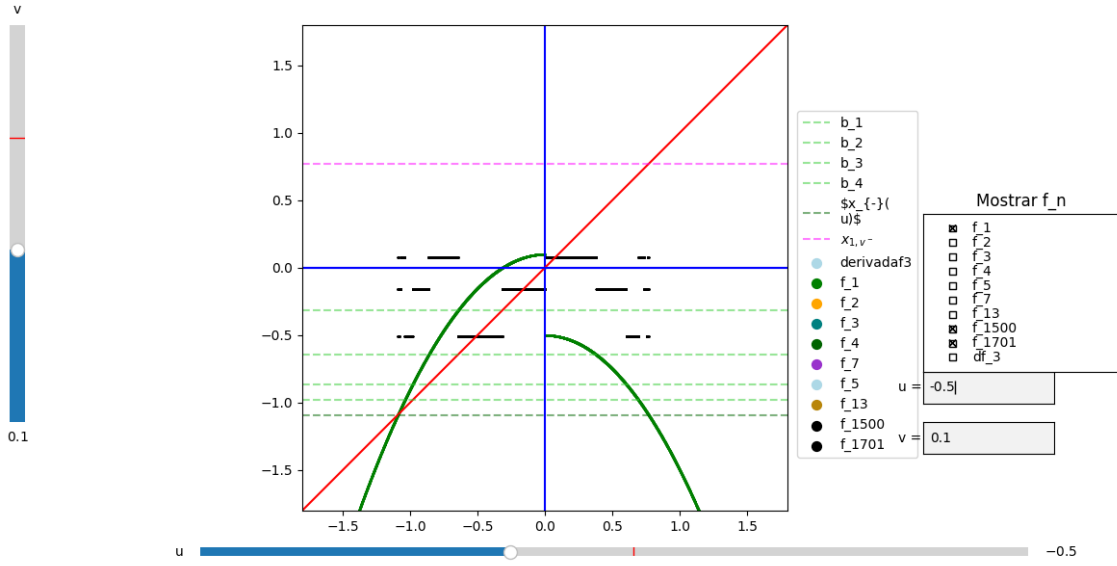


Figura 21: Ejemplo de periodo 3 para $\mu \in (b_2, b_1)$

Si $b_3 < \mu < b_2$, entonces $f_{\mu, \nu}$ tiene un punto de periodo 4.

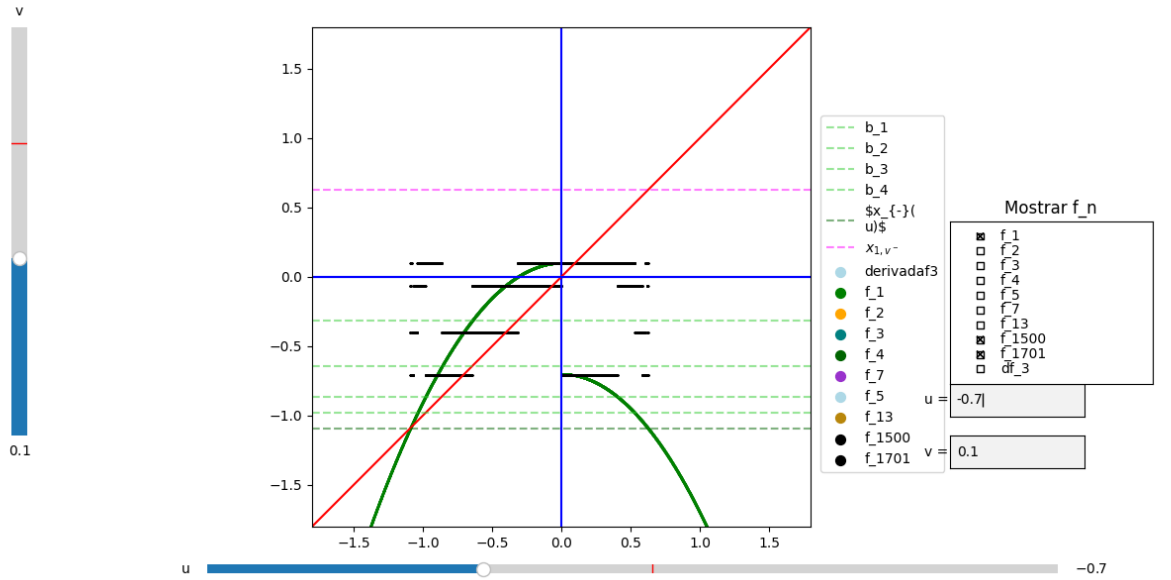


Figura 22: Ejemplo de periodo 4 para $\mu \in (b_3, b_2)$

Si $b_4 < \mu < b_3$, entonces $f_{\mu, \nu}$ tiene un punto de periodo 5.

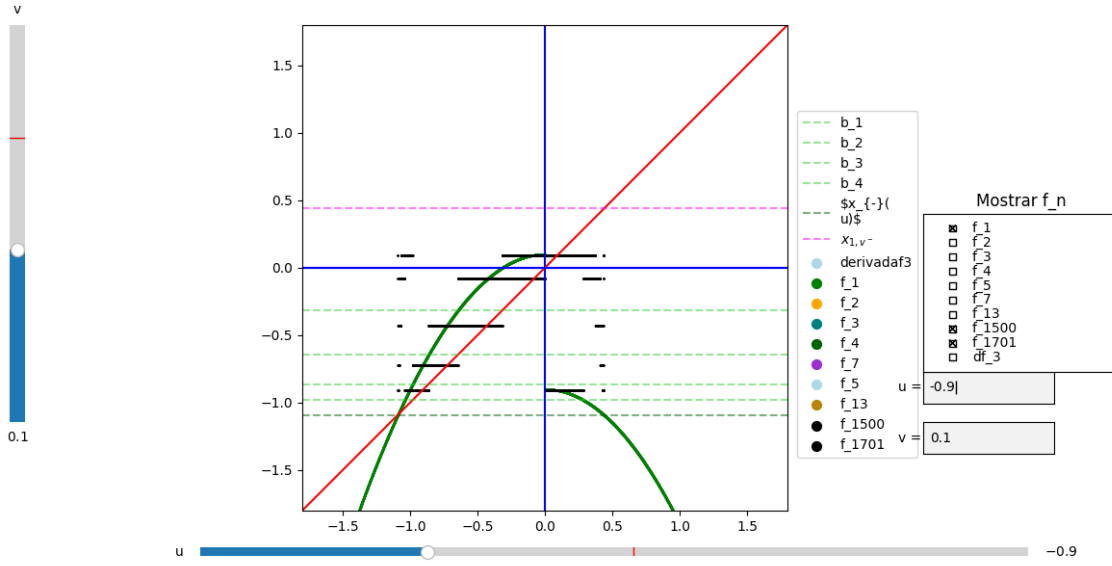


Figura 23: Ejemplo de periodo 5 para $\mu \in (b_4, b_3)$

Llamaremos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_i = b_\infty$$

A partir de la relación de recurrencia para b_i , tenemos que

$$b_\infty = -\sqrt{\nu - b_\infty}$$

Reordenando

$$b_\infty^2 + b_\infty - \nu = 0$$

Ya hemos resuelto esta ecuación previamente, buscando los puntos fijos de f_ν :

$$b_\infty = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2} = x_-(\nu)$$

Tenemos entonces una familia de curvas de bifurcación

$$\mu_i(\nu) = b_i(\nu)$$

Que convergen a

$$x_-(\nu)$$

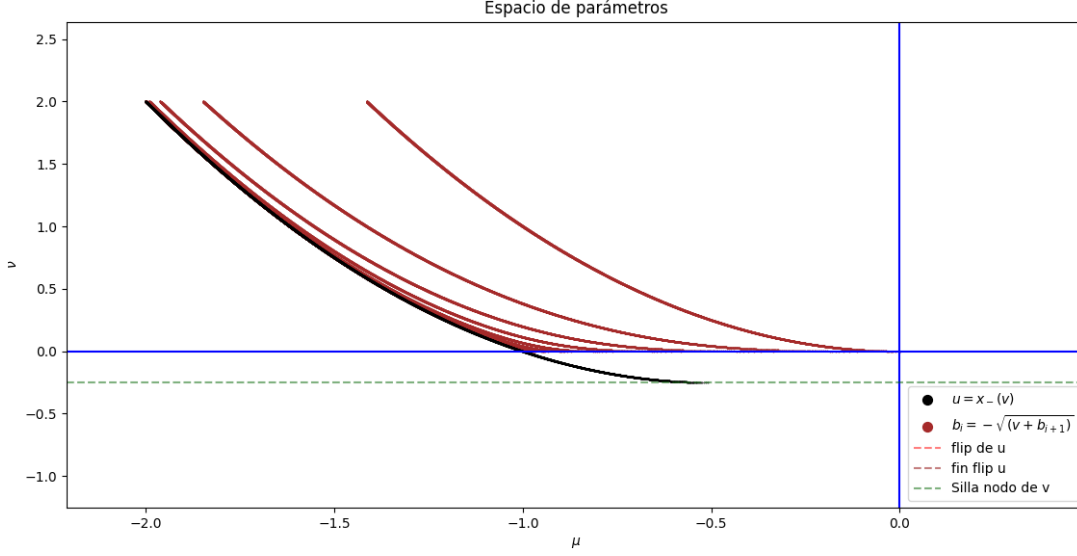


Figura 24: Sucesión de curvas convergentes μ_i

Esta familia, definida para $\nu > 0$ tales que considerando $\tilde{\nu}_i$, sucesión de valores que cumple $\mu_i(\nu_i) = -1$, tenemos

$$0 < \dots < \tilde{\nu}_n < \tilde{\nu}_{n-1} < \dots < \tilde{\nu}_1, \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\nu}_i = 0$$

Considerando las restricciones correspondientes de μ_i a los intervalos $\mu_i : [\tilde{\nu}_i, \infty) \rightarrow (-\infty, -1]$. Estamos en condiciones de utilizar el teorema de Dini, y asegurar la convergencia uniforme.

Teorema 5 (Dini). *Sea K un espacio compacto y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$;
2. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in K$;
3. la función límite $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Entonces la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en K .

Notar que el resultado sigue siendo válido si la sucesión (f_n) es monótona decreciente, es decir, si $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$, manteniéndose las demás hipótesis.

Para nuestro caso $(f_{b_i})_{i \in \mathbb{N}}$, es una sucesión monótona de funciones reales continuas, raíces negativas que aumentan su módulo. En el primer caso $-\sqrt{\nu + \sqrt{\nu}} < -\sqrt{\nu}$, en general $f_{b_{i+1}} < f_{b_i}$. Previamente, hemos probado que $f_{b_i} \rightarrow x_-(\nu)$ cuando $i \rightarrow \infty$, con $x_-(\nu)$ también aplicación continua.

Por el teorema de Dini, esta sucesión converge uniformemente sobre cualquier compacto que no contenga al 0, dejamos fuera este valor ya que la pendiente de las raíces explota cerca de este punto.

4.4. $0 < \mu < \frac{3}{4}$

Todavía en esta sección mantenemos $1 > \nu > 0$.

En este tramo de μ , existe el atractor $x_+(\mu)$.

Aquí, el describir los distintos intervalos con dinámicas invariantes se complica, ya que tenemos preimágenes del 0 desde ambos tramos de la función.

Para comenzar, tenemos los ceros de primer orden, $\sqrt{\mu}$ con $x > 0$, y $-\sqrt{\nu}$ con $x < 0$.

Definimos ahora las siguientes sucesiones $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de preimágenes de $\sqrt{\mu}$, que cumplen:

- $M_i > 0$; $m_i < 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
- $f_{\mu, \nu}(M_1) = f_\mu(M_1) = 0 \implies M_1 = \sqrt{\mu}$
- $f_{\mu, \nu}(m_1) = f_\nu(m_1) = M_1 \implies m_1 = -\sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}$.
- En general: $f_\nu(m_i) = M_i$, $f_\nu(f_\mu(M_i)) = M_{i-1}$
- $m_i = -\sqrt{\nu - M_i}$, $M_i = \sqrt{\mu - m_{i-1}}$
- $M_i = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - M_{i-1}}}$
- $m_i = -\sqrt{\nu - \sqrt{\mu - m_{i-1}}}$

Los elementos de estas sucesiones, son candidatos a bifurcaciones. En este sentido, esperaríamos distintas dinámicas para $M_i < \nu < M_{i+1}$ para distintos $i \in \mathbb{N}$. Estudiaremos cuáles tramos provocan cambios en el sistema:

Notemos que podemos separar la sucesión en dos subsucesiones monótonas: Si los valores de M_{2i} existen, decrece, y la de los impares M_{2i-1} crece cuando sus valores están bien definidos:

Esto es claro con el siguiente análisis:

$$M_1 = \sqrt{\mu}, \quad M_3 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}}}}$$

Osea que, si $\exists M_3 > 0$,

$$M_1 = \sqrt{\mu}, \quad M_3 = \sqrt{\mu + P(\mu, \nu)}, \text{ con } P \geq 0 \quad (13)$$

Por lo tanto

$$M_1 < M_3 \text{ ya que la raíz es creciente en los positivos.}$$

Directamente esto nos da el caso base para los pares, dado que $M_i > 0$

$$M_1 < M_3 \iff -M_1 > -M_3 \iff \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - M_1}} > \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - M_3}} \iff M_2 > M_4$$

Debido a que el avanzar en la sucesión invierte el orden, concluimos inductivamente esta separación monótona de la función.

Al analizar M_i , podemos notar que al recorrer la sucesión, cada elemento de ésta tiene condiciones de existencia (condiciones para ser real) a partir de la raíz o raíces que lo definen:

Para que $M_2 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}} \in \mathbb{R}$, necesitamos que

$$\nu \geq \sqrt{\mu}$$

Para que $M_3 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}}}} \in \mathbb{R}$, necesitamos que

$$\begin{aligned} \nu &\geq \sqrt{\mu}, \text{ y que} \\ \nu &\geq \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}} = M_2 \\ \nu &\geq M_2 \end{aligned}$$

El mayor de los elementos de la sucesión,

$$M_2 > M_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

Entonces, para la existencia de M_3 , se necesita $\nu \geq M_2$, pero $M_2 > M_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que los intervalos (M_i, M_{i+1}) , $i > 2$ no tienen sentido, (son intervalos degenerados) del estilo (M_2, M_3) que cumplen si $\exists M_3 \implies M_2 > M_3$ por tanto no hay bifurcaciones (en los bordes, adentro menos).

Si se realiza un análisis similar, para la sucesión que va por los negativos m_i , las condiciones para las raíces son tan estrictas que para la mayoría de los parámetros en esta zona, m_2 en adelante no existen:

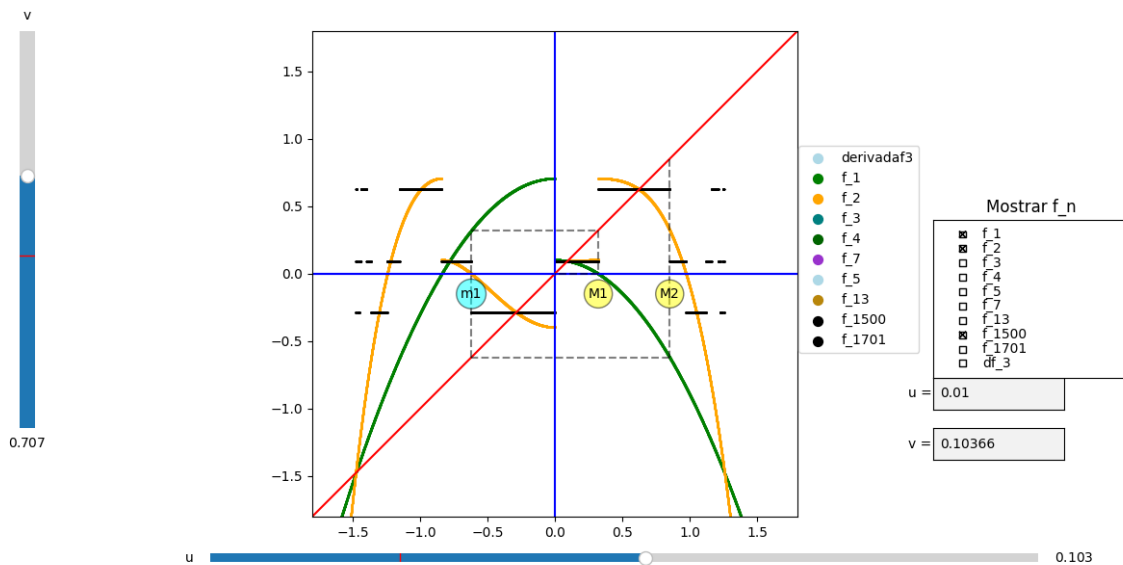


Figura 25: Candidatos a bifurcación pre flip

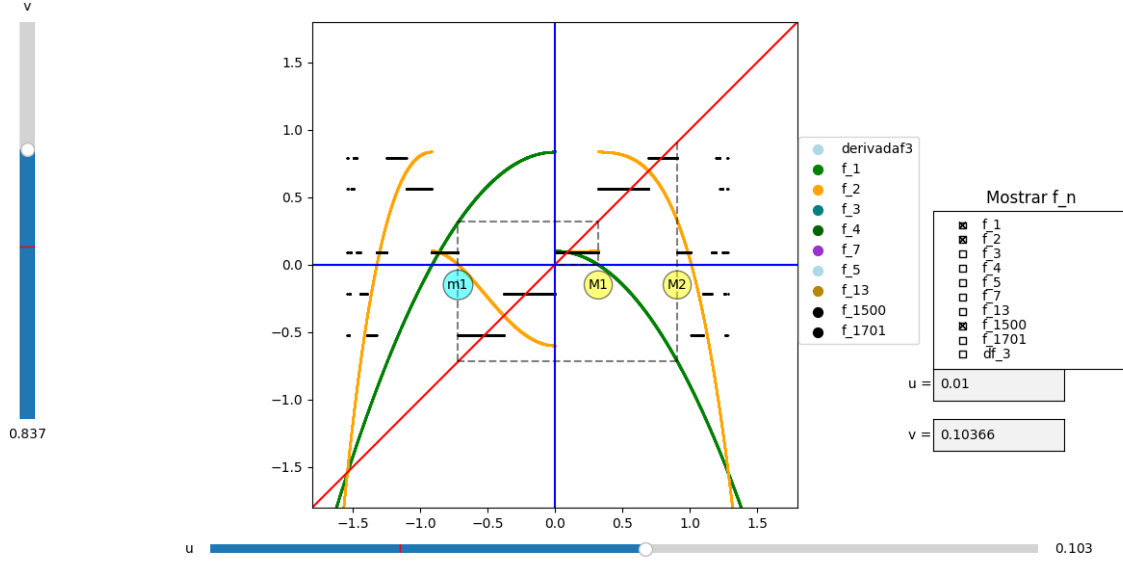


Figura 26: Candidatos a bifurcación post flip

En los gráficos es muy explícito como estos puntos marcan fronteras de comportamiento para los distintos intervalos de la función.

Para cerrar sobre estas sucesiones de puntos (que más que nada son sucesiones de relaciones algebraicas no reales), consideremos las relaciones de recurrencia para M_i, m_i descritas anteriormente, y veamos quiénes se esconden en los límites de estas sucesiones:

$$M_i = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - M_{i-1}}} \quad (14)$$

$$m_i = -\sqrt{v - \sqrt{\mu - m_{i-1}}} \quad (15)$$

Considerando la continuidad de las raíces, miremos el límite cuando $i \rightarrow \infty$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \lim_{i \rightarrow \infty} M_{i-1}}} \quad (16)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = -\sqrt{v - \sqrt{\mu - \lim_{i \rightarrow \infty} m_{i-1}}} \quad (17)$$

Recordando que $0 < M_i < M_2$, $m_2 < m_i < 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, y que cada sucesión en particular puede dividirse en dos subsucesiones monótonas. Nos permitimos nombrar a los límites de estas sucesiones como

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = M_\infty \quad (18)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m_\infty \quad (19)$$

Reemplazando ahora en (5):

$$M_\infty = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - M_\infty}} \quad (20)$$

$$m_\infty = -\sqrt{\nu - \sqrt{\mu - m_\infty}} \quad (21)$$

Notemos que

$$f_{\mu,\nu,-,+}(M_\infty) = M_\infty$$

$$f_{\mu,\nu,+,-}(m_\infty) = m_\infty$$

Ambos límites son puntos de período dos para $f_{\mu,\nu}$.

A partir de este análisis, y notando que las condiciones de los valores que son candidatos a bifurcación imponen restricciones sobre ν dividiremos casos para este parámetro cuando es positivo.

4.4.1. Zona C_3 $0 < \mu < \nu < \sqrt{\mu}$

La condición impuesta sobre ν , provoca que las imágenes de $f_\nu(x) = \nu - x^2 < \sqrt{\mu}$, ($x < 0$).

Entonces, las imágenes de $f_\nu(x)$, tal que $f_\nu(x) > x_-(\nu)$ entran en la cuenca de atracción de $x_+(\mu)$.

Indicamos ahora el conjunto límite creado por $f_{\mu,\nu}$ separando el intervalo en los puntos de referencia que hemos creado.

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), 0)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$
- Si $x \in (0, \bar{x}(\mu, \nu))$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$ o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = 0$

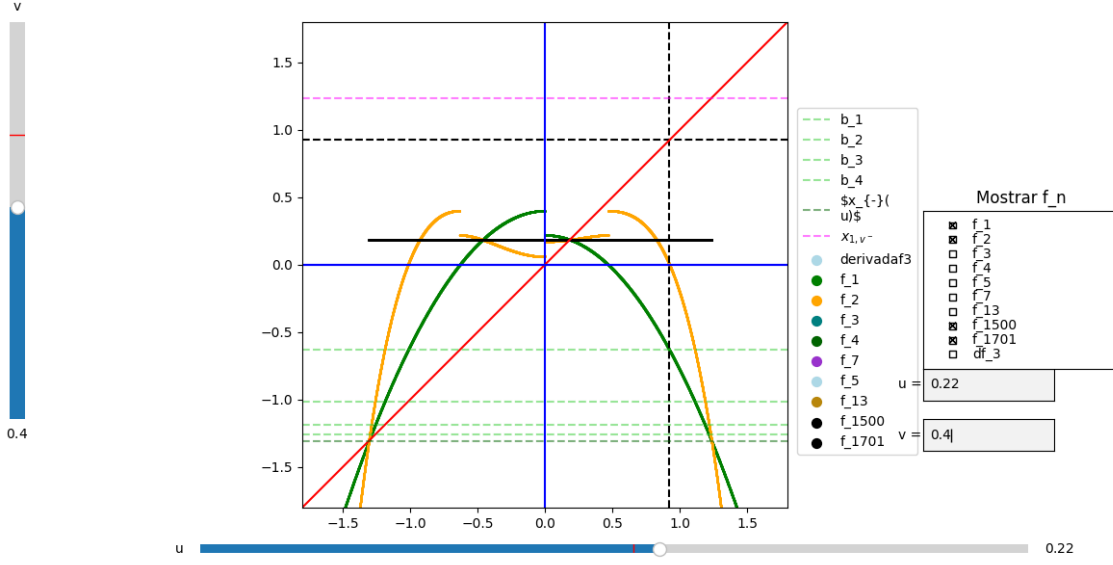


Figura 27: Caso en la Zona C_3

4.4.2. Zona C_4 $0 < \sqrt{\mu} < \nu < M_2$

Describimos al comienzo de la sección 3.4, las sucesiones que convergen a los puntos de período dos para $f_{\mu,\nu}$. Como mencionamos, al ser la raíz de μ una "pre-imagen del 0", si ν supera este valor, se presenta una órbita atractora de periodo dos en $f_{\mu,\nu}$, el intervalo se divide entonces de la siguiente manera:

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{-i}(0, \sqrt{\mu} = M_1)$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$
- Si $x \in \bigcup_{j=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{-j}(M_1, M_2)$, $f^n(x) \rightarrow \{x_+^2(\mu), x_-^2(\mu)\}$

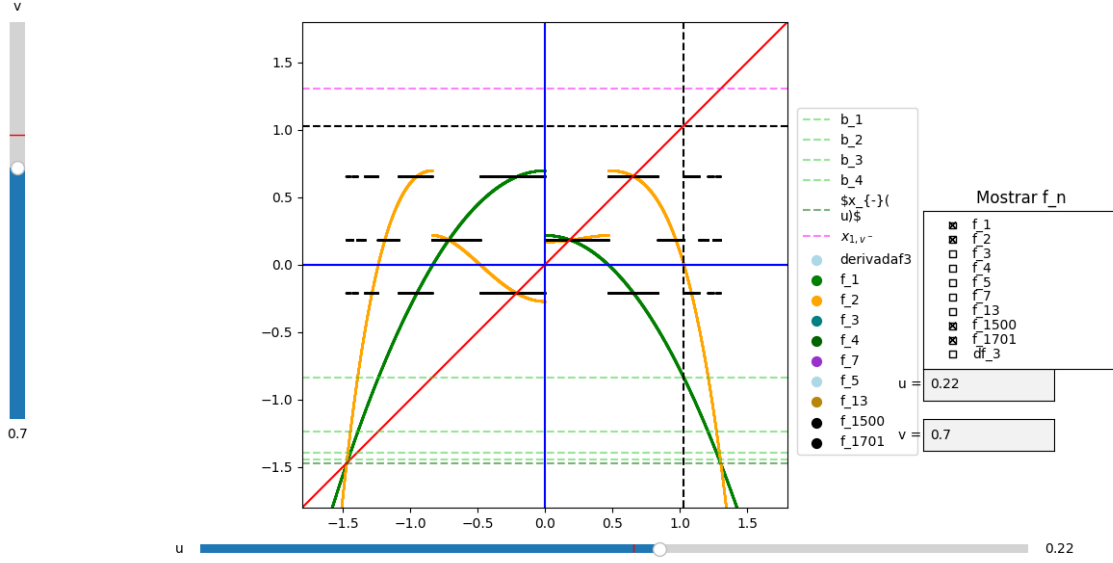


Figura 28: Caso en la Zona C_4

4.4.3. Flip de orden dos para $f_{\mu,\nu}$ en la variable ν

($0 < \mu < 1$, $M_1 < \nu < M_2$) Buscamos una curva de bifurcación que relacione los parámetros μ y ν cuando ocurre este fenómeno.

Primero, crearemos un sistema de ecuaciones a partir de las primeras condiciones para una bifurcación de tipo flip:

Punto fijo:

$$f_{\mu,\nu,-,+}(x) = \nu - (\mu - x^2)^2 = x$$

Derivada con valor -1 :

$$\frac{df_{\mu,\nu,-,+}(x)}{dx} = -1 = 4x(\mu - x^2)$$

A partir de estas ecuaciones, tenemos que

$$\mu = x^2 - \frac{1}{4x}, \quad \nu = \frac{1}{16x^2} + x \quad (22)$$

Si las reescribimos de manera cúbica, $x \neq 0$, tenemos

$$x^3 = \frac{1}{4} + x\mu, \quad x^3 = x^2\nu - \frac{1}{16} \quad (23)$$

Igualando estas ecuaciones para x^3 , tenemos

$$\nu x^2 - \mu x - \frac{5}{16} = 0 \quad (24)$$

Despejamos x ,

$$x(\mu, \nu) = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \frac{5}{4}\nu}}{2\nu}$$

Lo anterior expresa el punto fijo de $f_\nu \circ f_\mu$ con derivada -1.

En este caso, escogemos el signo positivo de la solución obtenida de la cuadrática para x , ya que la otra solución es negativa.

Mostraremos ahora la condición de no degeneramiento, caracterizada por las derivadas de la función

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x_0, \alpha^*)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f(x_0, \alpha^*)}{\partial x^3} \neq 0 \quad \text{para nuestro caso} \quad (25)$$

Recordar que la función sobre la que estamos estudiando el flip en este caso es $f^2(x) = \nu - (\mu - x^2)^2$

- $f_{\mu, \nu, -, +}(x) = \nu - (\mu - x^2)^2$
- $\left(\frac{\partial f_{\mu, \nu, -, +}}{\partial x} \right)(x) = 4x(\mu - x^2)$
- $\left(\frac{\partial^2 f_{\mu, \nu, -, +}}{\partial x^2} \right)(x) = 4(\mu - 3x^2)$
- $\left(\frac{\partial^3 f_{\mu, \nu, -, +}}{\partial x^3} \right)(x) = -24x$

Reemplazando en (25) con lo calculado

$$a = \frac{1}{2} (4(\mu - 3x^2))^2 + \frac{1}{3}(-24x) = 8(\mu - 3x^2)^2 - 8x \quad (26)$$

De (22), obtenemos un punto parametrizado con la variable x , que recoge la condición para un punto fijo y con derivada -1

Sea

$$Q = (\mu_0(x), \nu_0(x), x) = (x^2 - \frac{1}{4x}, \frac{16}{x^2} + x, x) \quad (27)$$

Evaluamos (26) con los parámetros que forman Q , obteniendo

$$a = \frac{1}{2x^2} + 32x^2$$

El valor de a es positivo para cualquier $x \neq 0$. Concluimos que la condición de no degeneramiento se cumple.

Continuando, para mostrar la existencia y el tipo de bifurcación en este caso y en otros, no es necesario calcular la función que describe al punto fijo, este paso es evitable derivando de manera implícita y aprovechando las condiciones en el punto fijo. Calcularemos el último criterio del flip (conocida como transversalidad, que incluye las derivadas cruzadas) de esta manera:

Queremos verificar que

$$T = \frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_Q \neq 0$$

Recalcamos que considerando μ_0 fijo, la derivada parcial de μ con respecto a ν es nula. Además, previamente explicitamos $\frac{df^2}{dx}$, y no depende de ν para esta iteración. Entonces T queda

$$T = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \quad (28)$$

Revisaremos por separado estos factores, definimos

$$F : (I \times I_2 \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \mu \in I, \nu \in I_2 \text{ intervalos positivos reales}$$

$$F(\mu, \nu, x) = f_{\mu, \nu}^2(x) - x = \nu - (\mu - x^2)^2 - x$$

Es claro por construcción que

$$F(Q) = 0$$

Además, sobre su derivada, por construcción

$$\frac{d}{dx}F(Q) = \frac{d}{dx}f_{\mu_0, \nu_0}^2(x) - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Al reunir las condiciones para invocar el teorema de la función implícita, lo utilizamos para calcular $\frac{dx}{d\nu}$ donde x representa el punto fijo:

$$\mathbf{T.F.I} \implies \frac{\partial x}{\partial \nu} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \nu}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Calculamos

- $\frac{\partial F}{\partial \nu} = 1$
- $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(\mu - x^2)$

Reemplazando

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = -\frac{1}{4x(\mu - x^2)} \neq 0 \quad , \forall x > \sqrt{\mu}$$

Nos falta estudiar $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(\mu - 3x^2)$, el otro múltiplo de 28. Previamente, vimos que al evaluar en el punto Q ,

$$4(\mu - 3x^2) = 4(-\frac{1}{4x} - 2x^2)$$

Reemplazando lo calculado evaluado en Q en (28)

$$T = 4(-\frac{1}{4x} - 2x^2) \cdot \frac{1}{4x(-\frac{1}{4x})} = \frac{1}{x} + 8x^2$$

De aquí concluimos que $T \neq 0$, y por tanto la bifurcación es de tipo flip.

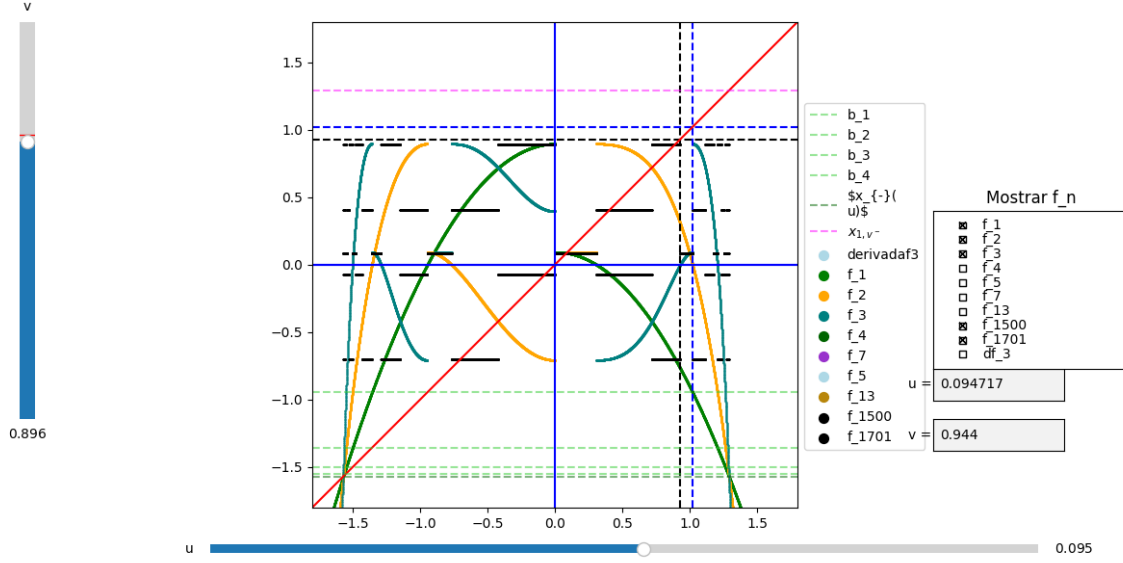


Figura 29: En este caso se puede apreciar el flip de periodo 2, y un $\nu < M_2$, pero muy cercano. M_2 es la línea segmentada negra.

Ya hemos probado que si $\sqrt{\mu} < \nu < M_2$, entonces la aplicación $f_\nu \circ f_\mu$ presenta una órbita periódica atractora (de orden dos para f), luego, cuando $\sqrt{\mu} < \nu < \nu_{flip2}$, donde ν_{flip2} , es el valor de ν tal que la órbita periódica de periodo dos es atractora con derivada -1. La última bifurcación que vimos fue que si $\nu_{flip2} < \nu < M_2$, tenemos una órbita atractora de período 4.

Nos detenemos ahora en la ecuación $\nu = M_2$, recordamos que $M_2 > M_1$ es tal que $f_\nu \circ f_\mu(M_2) = M_1$,

$$M_2 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}}$$

Agregamos las curvas asociadas a $\nu = \nu_{flip2}$ y a $\nu = M_2$ al espacio de parámetros. Estas curvas fueron graficadas considerando la solución a las ecuaciones, la primera de grado 3, y la segunda de grado 4.

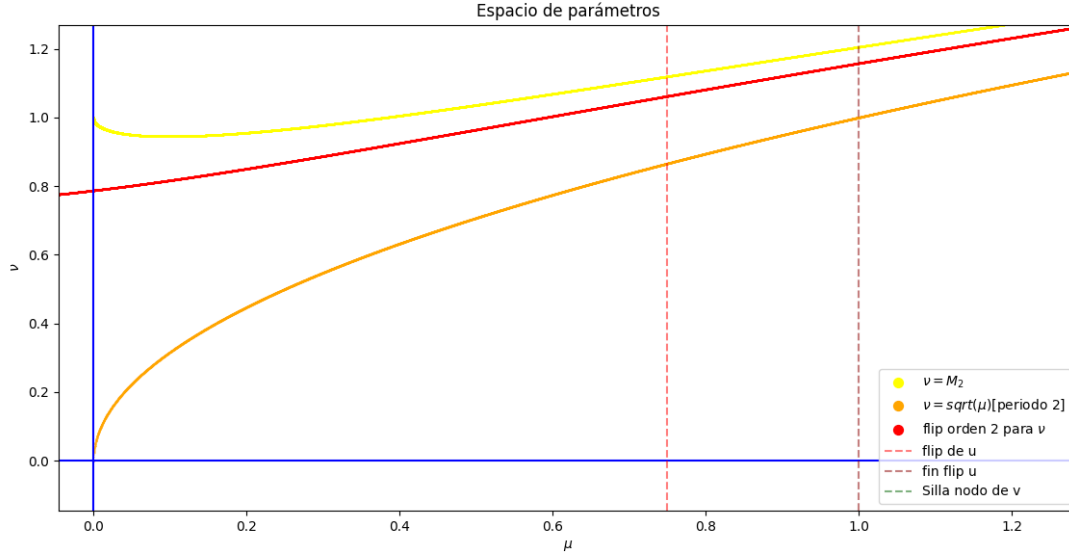


Figura 30: Zoom en el espacio de parámetros en el que se ven las curvas mencionadas.

4.4.4. Periodo de paz entre el flip de orden 2 y un periodo 3:

$$M_2 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}} < \nu$$

Considerando que el flip de segundo orden para ν , genera una órbita atractora de periodo 4 para $f_{\mu,\nu}$ en el tramo $-, +, -, +$, de $f_{\mu,\nu}^4$, observamos que ésta órbita se pierde cuando

$$\nu > M_2 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu - \sqrt{\mu}}}$$

debido a que la imagen de ν , cambia de positiva a negativa para $f_{+,-,+}$. Es decir el punto cambia de tramo y desaparece la órbita atractora:

Recordemos que si $\nu = M_2$

$$f_{+,-,+}(M_2) = 0$$

Si consideramos su derivada:

$$\frac{df_{+,-,+}(x)}{dx} = -8x(\nu - (\mu - x^2)^2)(\mu - x^2)$$

Ya que es un producto, es fácil estimar que

$$\frac{df_{+,-,+}(M_2)}{dx} > 0$$

Así, $f_{+,-,+}(x)$ es creciente en una vecindad del punto, por lo que tenemos que Si $\nu < M_2$

$$f_{+,-,+}(\nu) < 0$$

La órbita $-, +, -, +$ tiene sentido.

Si $\nu > M_2$

$$f_{+,-,+}(\nu) > 0$$

Se pierde la órbita $-, +, -, +$.

De esta manera, si $M_2 < \nu$, podemos describir el conjunto límite generado por $f_{\mu,\nu}$ considerando que salvo que x sea preimagen del 0 o del punto fijo de orden 2, repulsor $x(\mu, \nu) \in (M_1, M_2)$

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\bar{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \in (x_-(\nu), \bar{x}(\mu, \nu))$, $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$

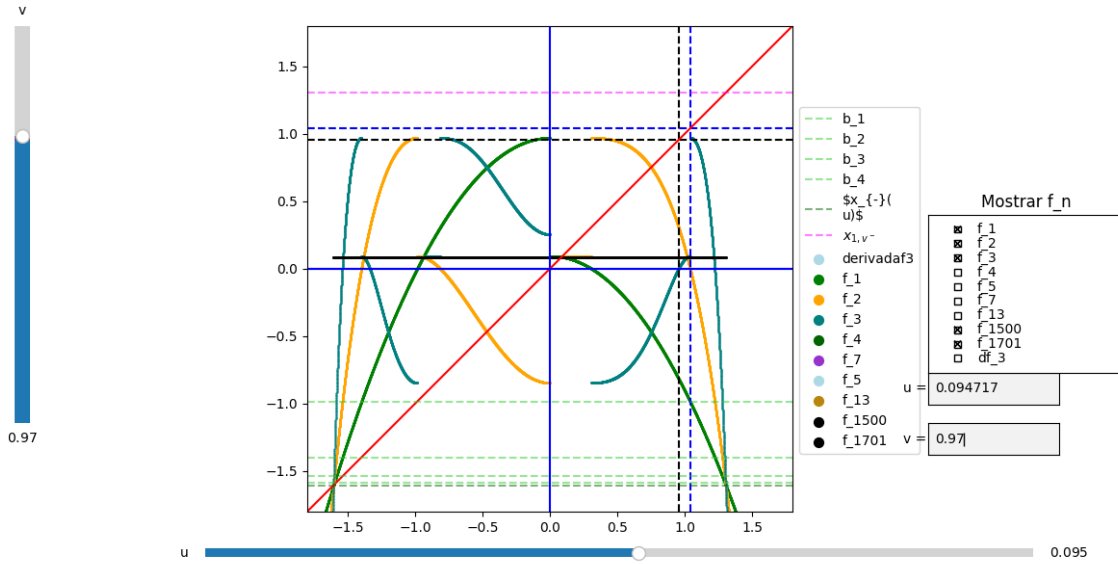


Figura 31: Caso $\nu > M_2$ (M_2 es la línea segmentada negra)

4.4.5. $\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu} < \nu$

Continuando con el análisis de preimágenes del 0, comentamos anteriormente que desde que $\nu > 0$, se presentan preimágenes "mezcladas", intercalando los tramos de la función. Axel Silva consideró algunas en su tesis con $\mu = 0$, y precisamente crearemos la curva de bifurcación a partir del mismo análisis:

Sea $z_1 = \sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}$, tal que $f_{\mu,\nu,-,+}(z_1) = 0$, además se cumple que

$$f_{\mu}(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}) = -\sqrt{\nu} = b_1$$

Al identificar un cero, en este caso para la segunda iteración de la función en el tramo $-, +$; este punto crítico separa los puntos que con dos iteraciones son positivos (a la izquierda de z_1) y los que son negativos (a la derecha de z_1). Diferenciando en este caso los tramos de $f_{+,-,+}^3$ a la izquierda de z_1 y $f_{-,-,+}^3$ a la derecha de z_1 . El

interés está en el segundo:

Si $\nu < z_1$, $f_{-,-,+}^3$ no puede tener puntos fijos, ya que

$$f_\nu(x) \leq \nu < z_1$$

Cuando ν cruza el valor z_1 , a saber $\nu > z_1$, la cota anterior no existe, y hay un intervalo a la derecha de z_1 que regresa a su intervalo en el lado positivo vía $f_{-,-,+}^3$, esto significa que para $\nu > z_1$ veremos el nacimiento de una órbita periódica de periodo 3 para $f_{\mu,\nu}$

Para estudiar esta iteración, definimos:

Sea $G_3(\mu, \nu, x) = f_{-,-,+}^3(x) - x = \nu - (\nu - (\mu - x^2)^2)^2 - x$

Sea $\tilde{z}_1 = \sqrt{\mu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu - z_1}}}$, tal que $f_{-,-,+}^3(\tilde{z}_1) = z_1$, notemos que $z_1 < \tilde{z}_1$

Consideremos $A = (\nu^2 - \sqrt{\nu}, \nu, \sqrt{\mu + \sqrt{\nu}})$, tal que $G_3(A) = 0$.

Notemos que la condición en la primera coordenada de A, $\mu = \nu^2 - \sqrt{\nu}$, tiene como consecuencia que para que $\mu > 0$, necesitamos $|\nu| > 1$.

Consideremos ahora la derivada de $G_3(\mu, \nu, x)$:

$$\frac{dG_3(x)}{dx} = (-2)^3 \cdot f_{-,-,+}(x) \cdot f_+(x) \cdot x - 1$$

Evalutando $\frac{dG_3(x)}{dx}$ en A

$$\frac{dG_3(A)}{dx} = (-2)^3 \cdot 0 \cdot (\mu - x^2) \cdot x - 1 = -1 \neq 0$$

Reunimos entonces las condiciones para afirmar que, por el Teorema de la función implícita, G_3 tiene un 0 en una vecindad de A, que es lo mismo que $f_{-,-,+}^3$ tiene un punto fijo cuando $(\mu, \nu, x) \approx (\nu^2 - \sqrt{\nu}, \nu, \sqrt{\mu + \sqrt{\nu}})$.

Si miramos la derivada evaluada en $\tilde{z}_1$

$$\frac{df_{-,-,+}^3(\tilde{z}_1)}{dx} = (-2)^3 \cdot f_{-,-,+}^2(\tilde{z}_1) \cdot f_\mu(\tilde{z}_1) \cdot \tilde{z}_1$$

Podemos estimar que

$$f_{-,-,+}(z_1) = 0$$

y que

$$\frac{df_{-,-,+}^3(\tilde{z}_1)}{dx} = (-2)^3 \cdot (-\sqrt{\nu - z_1}) \cdot \left(-\sqrt{\nu + \sqrt{\nu - z_1}}\right) \cdot z_1 < 0$$

Ya que tres de sus factores son negativos y uno es positivo.

De esta manera, dada la continuidad de la derivada de f^3 , tenemos que en el intervalo $(z_1, \tilde{z}_1)$ hay un punto fijo atractor para f^3 , es decir una órbita atractora de periodo 3 para $f_{\mu,\nu}$ (el punto periódico de periodo 3 es cercano a z_1 , y está a su derecha. Por lo que tiene una derivada negativa cercana a 0.)

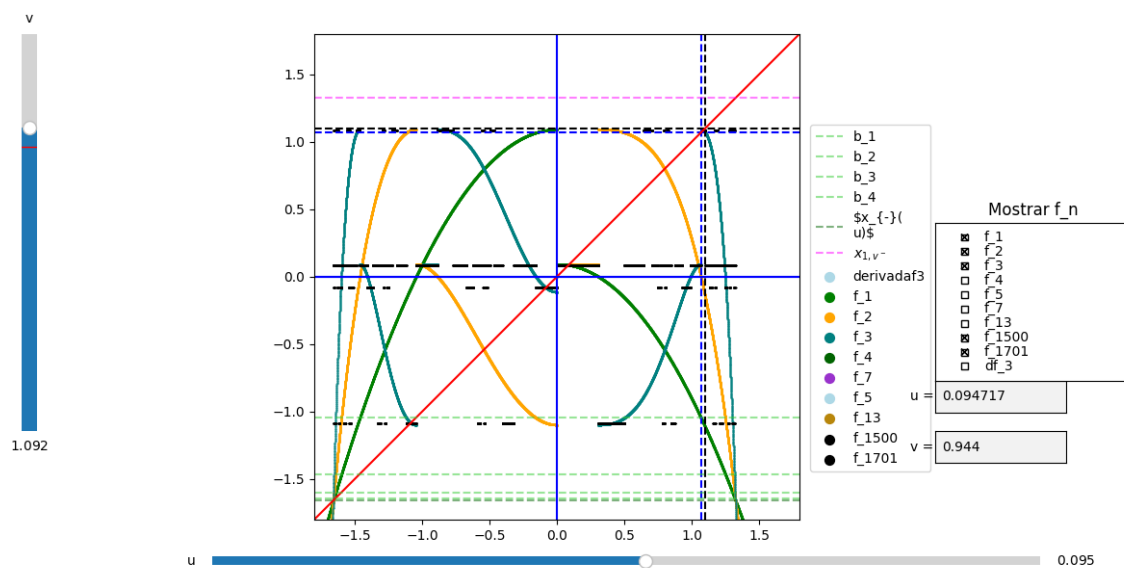


Figura 32: Caso $\nu > z_1$, z_1 es la línea punteada azul, y $\tilde{z}_1$ es la línea punteada negra. Se puede apreciar la órbita atractora de periodo 3 y además el atractor $x_+(\mu)$

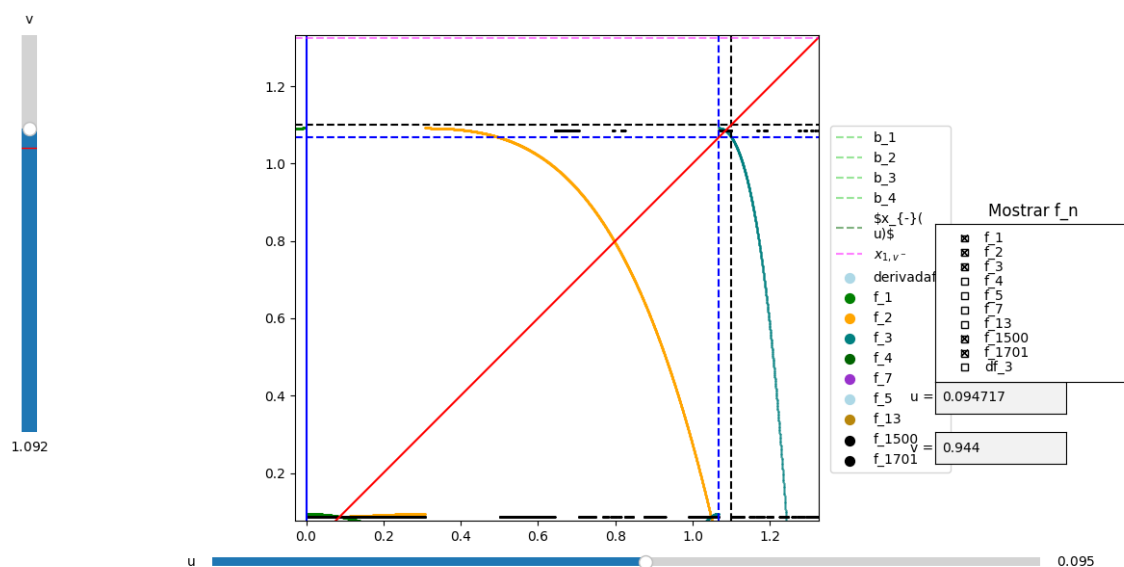


Figura 33: Zoom figura 24

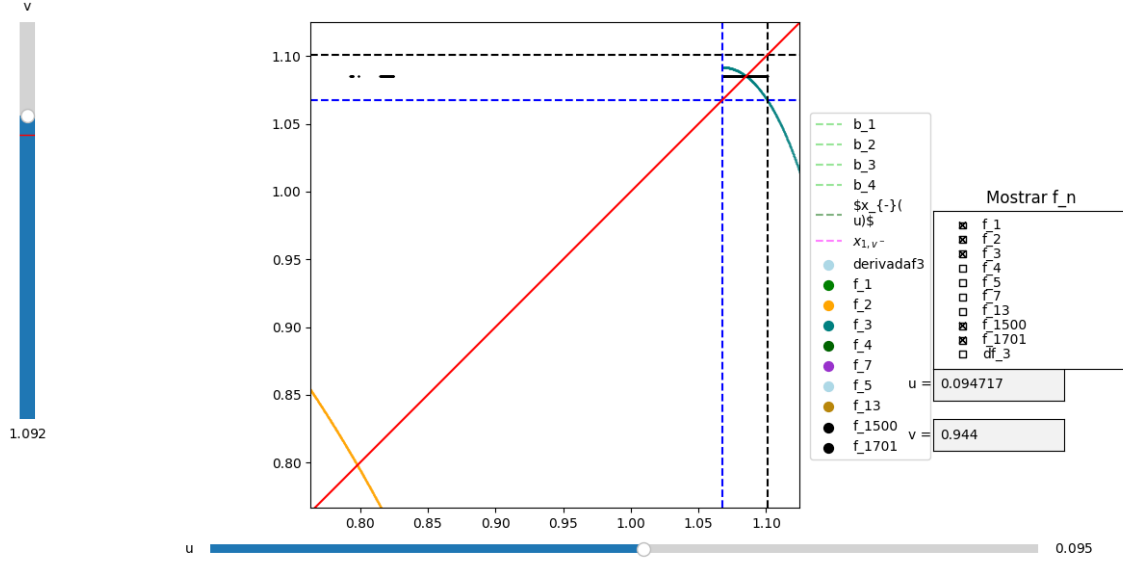


Figura 34: Zoom figura 25, se puede apreciar claramente el punto fijo de orden 3 de naturaleza atractora

4.4.6. Flip de orden tres para $f_{\mu,\nu}$ en la variable ν

Probaremos ahora la existencia de un flip para $f^3 = f_{\mu,\nu,-,-,+} = \nu - (\nu - (\mu - x^2)^2)^2$. Como antes, comenzaremos con un sistema a partir de la condición de punto fijo y de la derivada de nuestra función:

$$\nu - (\nu - (\mu - x^2)^2)^2 - x = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial x} = -8x(\mu - x^2)(\nu - (\mu - x^2)^2) = -1 \quad (30)$$

En adelante, para simplificar $f_\mu(x) = \mu - x^2$. De (30), despejamos

$$\nu - f_\mu(x)^2 = \frac{1}{8xf_\mu(x)}$$

Al hacer esto, estamos considerando:

- $x > 0, \implies x \neq 0$
- $f_\mu(x) < 0, \implies f_\mu(x) \neq 0$

Ambas ciertas ya que $x > z_1 = \sqrt{\mu} + \sqrt{\nu}$. Obtenemos entonces

$$\nu_3(\mu) = (f_\mu(x))^2 + \frac{1}{8xf_\mu(x)} \quad (31)$$

Reemplazando (31) en (29), y reordenando, obtenemos que

$$\nu_3 = \frac{1}{64x^2(f_\mu(x))^2} + x \quad (32)$$

Esta es una relación que caracteriza ambas condiciones. En particular, define de manera explícita la forma que debe tener el parámetro ν con x y μ . De manera similar, podemos obtener que

$$\mu_3 = \frac{-1}{8x\sqrt{\nu-x}} + x^2 \quad (33)$$

Estas ecuaciones las calculamos para graficar paramétricamente en el espacio de parámetros la curva flip.

Para continuar, probaremos que se cumple la condición de transversalidad:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial f^3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \nu} (-8xf_\mu(x)(\nu - (f_\mu(x))^2)) = -8xf_\mu(x)(1) = -8xf_\mu(x) \quad (34)$$

Utilizando las condiciones del intervalo,

$$x > 0, x \neq 0; f_u(x) < 0, f_\mu(x) \neq 0 \implies \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial f^3}{\partial x} = -8xf_\mu(x) \neq 0$$

Cumpliendo la condición. El siguiente paso será calcular las derivadas de orden mayor y analizar el criterio que nos queda (no degeneramiento del flip).

La condición de no-degeneramiento, es que

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_{\mu,\nu}(x)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f_{\mu,\nu}(x)}{\partial x^3} \neq 0 \quad (35)$$

Se cumpla al evaluar en el punto fijo.

Comenzamos calculando las derivadas de orden dos y tres para $f^3 = f_\nu \circ f_\nu \circ f_\mu$:

Nota: ojo aquí, los superíndices de las funciones representan iteraciones, si hay una potencia será de la forma $(f^3(x))^2$ (la tercera iteración de f al cuadrado)

$$\frac{\partial^2 f^3}{\partial x^2} = 8((f_\mu(x))^3 - f_\mu(x)\nu + 2x^2\nu - 6x^2(f_\mu(x))^2) \quad (36)$$

$$\frac{\partial^3 f^3}{\partial x^3} = 8(24x^3 f_\mu(x) - 18(f_\mu(x))^2 x + 6\nu x)$$

Ahora, utilizamos la parametrización obtenida en (31) y evaluamos en este mapeo de ν en función de μ

Luego de reordenar, las derivadas quedan

$$\frac{\partial^2 f^3}{\partial x^2} \big|_{\nu_3(\mu)} = -8 \left(\frac{f_\mu(x) - 2x^2}{8xf_\mu(x)} + 4x^2((f_\mu(x))^2) \right)$$

Calculamos el término de la condición de transversalidad

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial x^2} \big|_{\nu_3(\mu)} \right)^2 = 32 ((f_\mu(x) - 2x^2)^2 (\nu - f_\mu(x)^2)^2 + 8x^2 f_\mu(x)^2 (f_\mu(x) - 2x^2) (\nu - f_\mu(x)^2) + 16x^4 f_\mu(x)^4) \quad (37)$$

De la ecuación de punto fijo, (29), tenemos que $(\nu - f_\mu^2)^2 = \nu - x$, reemplazamos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial x^2} \Big|_{\nu_3(\mu)} \right)^2 = 32 \left((f_\mu(x) - 2x^2)^2 (\nu - x)^2 + 8x^2 f_\mu(x)^2 (f_\mu(x) - 2x^2) (\nu - f_\mu(x)^2) + 16x^4 f_\mu(x)^4 \right) \quad (38)$$

$$\frac{\partial^3 f^3}{\partial x^3} \Big|_{\nu_3(\mu)} = 8(24x^3 f_\mu(x) - 12(f_\mu(x))^2 x + \frac{3}{4f_\mu(x)})$$

Y su término en la condición de transversalidad

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^3 f^3}{\partial x^3} \Big|_{\nu_3(\mu)} = 8(8x^3 f_\mu(x)^3 - 4f_\mu(x)^2 + 2x(\nu - f_\mu(x)^2)) \quad (39)$$

Utilizando (38) y (39),

$$\begin{aligned} a = & 32 (f_\mu(x) - 2x^2)^2 (\nu - x) \\ & + 256x^2 f_\mu(x)^2 (f_\mu(x) - 2x^2) (\nu - f_\mu(x)^2) \\ & + 512x^4 f_\mu(x)^4 \\ & + 64x^3 f_\mu(x)^3 \\ & - 32x f_\mu(x)^2 \\ & + 16x (\nu - f_\mu(x)^2) \end{aligned} \quad (40)$$

Reordenando el segundo término, para utilizar la condición de la derivada,

$$\begin{aligned} a = & 32 (f_\mu(x) - 2x^2)^2 (\nu - x) \\ & + 32x f_\mu(x) (f_\mu(x) - 2x^2) \underbrace{8x f_\mu(x) (\nu - f_\mu(x)^2)}_{=1} \\ & + 512x^4 f_\mu(x)^4 \\ & + 64x^3 f_\mu(x)^3 \\ & - 32x f_\mu(x)^2 \\ & + 16x (\nu - f_\mu(x)^2) \end{aligned} \quad (41)$$

Eliminando términos semejantes del segundo, quinto y sexto sumando,

$$\begin{aligned} a = & 32 (f_\mu(x) - 2x^2)^2 (\nu - x) \\ & - 16x f_\mu(x)^2 \\ & + 512x^4 f_\mu(x)^4 \\ & + 64x^3 f_\mu(x)^3 \\ & - 64x^3 f_\mu(x) \\ & + 16x\nu \end{aligned} \quad (42)$$

Factorizando, obtenemos que

$$\begin{aligned} a = & 32 (f_\mu(x) - 2x^2)^2 (\nu - x) \\ & - 16x f_\mu(x) (f_\mu(x) + 4x^2) \\ & + 512x^4 f_\mu(x)^4 \\ & + 64x^3 f_\mu(x)^3 \\ & + 16x\nu \end{aligned} \quad (43)$$

Reordenando, y reemplazando $f_\mu = \mu - x^2$ cuando ayude a estimar el signo

$$\begin{aligned}
a &= 32 (\mu - 3x^2)^2 (\nu - x) \\
&\quad - 16x f_\mu(x) (\mu + 3x^2) \\
&\quad + 512x^4 f_\mu(x)^4 \\
&\quad + 64x^3 f_\mu(x)^3 \\
&\quad + 16x\nu
\end{aligned} \tag{44}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}
a &= 32 (\mu - 3x^2)^2 (\nu - x) \\
&\quad - 16x f_\mu(x) \mu \\
&\quad - 48x^3 f_\mu(x) \\
&\quad + 512x^4 f_\mu(x)^4 \\
&\quad + 64x^3 f_\mu(x)^3 \\
&\quad + 16x\nu
\end{aligned} \tag{45}$$

De la ecuación anterior, el único término que puede ser negativo es $64x^3 f_\mu(x)^3$, pues se tiene

$$-\sqrt{\nu + \sqrt{\nu}} \leq f_\mu(x) \leq -\sqrt{\nu} \tag{46}$$

$$\sqrt{\mu + \sqrt{\nu}} \leq x \leq \nu \tag{47}$$

Se utilizarán (46) y (47) para encontrar una cota inferior de la suma de el resto de los términos.

$$(46) \implies 48\sqrt{\nu} \leq -48f_\mu(x) \leq 48\sqrt{\nu + \sqrt{\nu}} \tag{48}$$

$$(47) \implies (\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} \leq x^3 \leq \nu^3; \quad (\mu + \sqrt{\nu})^2 \leq x^4 \leq \nu^4 \tag{49}$$

$$(46) \implies -(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} \leq f_\mu(x)^3 \leq -\nu^{\frac{3}{2}}; \quad \nu^2 \leq f_\mu(x)^4 \leq (\nu + \sqrt{\nu})^2 \tag{50}$$

$$(49) \text{ y } (50) \implies -64(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}}(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} \leq 64x^3 f_\mu(x)^3 \leq -64\nu^{\frac{9}{2}} \tag{51}$$

$$(49) \text{ y } (50) \implies 512(\mu + \sqrt{\nu})^2 \nu^2 \leq 512x^4 f_\mu(x)^4 \leq 512\nu^4 (\nu + \sqrt{\nu})^2 \tag{52}$$

$$(48) \text{ y } (49) \implies 48\sqrt{\nu}(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} \leq -48f_\mu(x)x^3 \leq 48 \left(\sqrt{\nu + \sqrt{\nu}} \right) \nu^3 \tag{53}$$

$$(47) \implies 16 \left(\sqrt{\mu + \sqrt{\nu}} \right) \nu \leq 16x\nu \leq 16\nu^2 \tag{54}$$

De (51), (52), (53) y (54), tenemos

$$\begin{aligned}
&-64(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}}(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 512(\mu + \sqrt{\nu})^2 \nu^2 + 48\sqrt{\nu}(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 16 \left(\sqrt{\mu + \sqrt{\nu}} \right) \nu \\
&\leq 64x^3 f_\mu(x)^3 + 512x^4 f_\mu(x)^4 - 48f_\mu(x)x^3 + 16x\nu \\
&\leq -64\nu^{\frac{9}{2}} + 512\nu^4 (\nu + \sqrt{\nu})^2 + 48 \left(\sqrt{\nu + \sqrt{\nu}} \right) \nu^3 + 16\nu^2
\end{aligned} \tag{55}$$

Consideramos ahora la función $H(\mu, \nu) = -64(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}}(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 512(\mu + \sqrt{\nu})^2\nu^2 + 48\sqrt{\nu}(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 16\left(\sqrt{\mu + \sqrt{\nu}}\right)\nu$ Las componentes de la función $H(\mu, \nu)$ satisfacen para $\mu = 0$

$$\begin{aligned} H(0, \nu) &= -64\nu^{\frac{3}{4}}(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 512(\nu)^{\frac{7}{4}} + 48\nu^{\frac{7}{4}} + 16\nu^{\frac{5}{4}} \\ &= -64\left(\nu^{\frac{5}{4}}\right)^2(1 + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 560(\nu)^{\frac{7}{4}} + 48\nu^{\frac{7}{4}} + 16\nu^{\frac{5}{4}} \end{aligned} \quad (56)$$

Vemos entonces que el término dominante es $\nu^{\frac{5}{4}}$, por tanto para $0 < \nu$ pequeño, $H(0, \nu) > 0$.

Notemos que para $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}$ se cumple que $H(0, v_n) = -64\left(\frac{1}{2}\right)^{10n}(1 + \sqrt{v_n})^{\frac{3}{2}} + 16\left(\frac{1}{2}\right)^{5n} + 560\left(\frac{1}{2}\right)^{7n}$ Esto es, que para $0 \leq n \leq 1$, domina el término $560\left(\frac{1}{2}\right)^{7n}$.

Estas estimaciones nos permiten confirmar que $\forall \nu > 0$ vale $H(0, \nu) \geq 0$.

Consideremos ahora $\nu > 0$ fijo, y μ variando entre $0 \leq \mu \leq 1$.

Si derivamos H con respecto a μ , tenemos

$$\frac{\partial H(\mu, \nu)}{\partial \mu} = -64\frac{3}{2}(\mu + \nu)^{\frac{1}{2}}(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 1024(\mu + \sqrt{\nu})\nu^2 + 48\frac{3}{2}\nu(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{1}{2}} + 16\frac{1}{2}\nu(\mu + \sqrt{\nu})^{\frac{-1}{2}} \quad (57)$$

Para $\mu = 0$

$$\frac{\partial H(0, \nu)}{\partial \mu} = -96(\nu)^{\frac{1}{2}}(\nu + \sqrt{\nu})^{\frac{3}{2}} + 1024\nu^{\frac{7}{4}} + 72\nu^{\frac{3}{2}} + 8\nu^{\frac{1}{2}}$$

Confirmamos entonces que para $\nu > 0$ pequeño, la función es dominada por $\nu^{\frac{1}{2}}$ y para $\nu \geq \frac{1}{2}$ domina el término $1024\nu^{\frac{7}{4}}$.

Así

$$\frac{\partial H(0, \nu)}{\partial \mu} > 0, \forall \nu > 0$$

Concluimos entonces que la expresión

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_{\mu, \nu}(x)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f_{\mu, \nu}(x)}{\partial x^3} > 0$$

Para todos los valores de x que satisfacen (46) y (47).

Este cálculo concluye la demostración de el flip para ν en el período 3 de f . Con este resultado finalizamos esta primera descripción del espacio de parámetros para este sistema. Las últimas zonas quedan delimitadas por las mismas curvas que se calcularon.

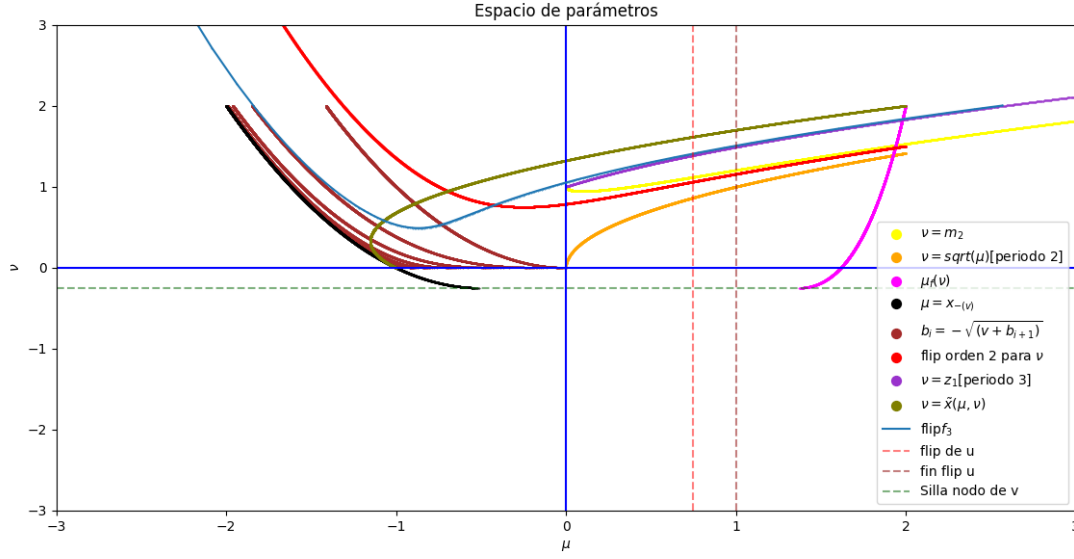


Figura 35: Espacio de parámetros con todas las curvas y zonas analizadas

4.5. Análisis e imágenes de periodos más altos

En la tesis de Axel Silva, se habla de una cascada de bifurcaciones de tipo flip, con una relación en las iteraciones en las que ocurre tipo Fibonnaci:

$$x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_n, \text{ con } x_0 = 2, x_1 = 3$$

En esta cascada las iteraciones 2 y 3, son una especie de bloque de construcción para todo el resto de las bifurcaciones tipo flip que ocurren. Estas también sentan la base estructural que se repite, esto fue estudiado en la tesis de Axel con el operador de renormalización.

Manteniéndonos en el caso de que $0 < \mu \leq \frac{3}{4}$ (O bien, $0 < \mu \leq 1$), al cruzar la curva de flip anterior, todo el intervalo $(\sqrt{\mu}, 0)$ es atraído por $x_+(\mu)$ (o bien, por la órbita atractora de periodo 2: $0 < x_-^2(\mu) < x_+(\mu) < x_+^2(\mu)$).

Como vimos en la sección anterior, para $z_1 < \nu < \tilde{z}_1$, hay una órbita de periodo 3; cuyo mayor punto es x_3^+ si $z_1 < \nu < \nu_{flip3}$. Luego, hay una órbita atractora de periodo 6 cuyo mayor punto mayor es x_6^+ que satisface $z_1 < x_5^+ = f^3(x_6^+) < x_3^+ < x_6^+ < \tilde{z}_1$ si $\nu_{flip3} < \nu < \tilde{z}_1$. Denotando x_2^+ el punto de periodo 2 repulsor de $f_{\mu,\nu}$ positivo, en este caso, la dinámica es la siguiente:

- Si $x \in (-\infty, x_-(\nu)) \cup (\tilde{x}(\mu, \nu), \infty)$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{-i}(\{x_+^2, f(x_+^2)\})$ y $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{-i}(\{0\})$, entonces $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$ o , $f^n(x) \rightarrow \{x_0, f_{\mu,\nu}(x_0), f_{\mu,\nu}^2(x_0)\}$, la órbita atractora de periodo 3; dado que x no sea preimagen del 0
- Al cruzar el flip, $\nu_{flip3} < \nu < \tilde{z}_1$, el intervalo sigue que

- Si $x \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{-i}(\{x_+^2, f(x_+^2)\})$ y $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_{\mu,\nu}^{-i}(\{0\})$, entonces $f^n(x) \rightarrow x_+(\mu)$ o , $f^n(x) \rightarrow \{x_0, f_{\mu,\nu}(x_0), f_{\mu,\nu}^2(x_0), f_{\mu,\nu}^3(x_0)\}, f_{\mu,\nu}^4(x_0), f_{\mu,\nu}^5(x_0)\}$, la órbita atractora de periodo 6; dado que x no sea preimagen del 0

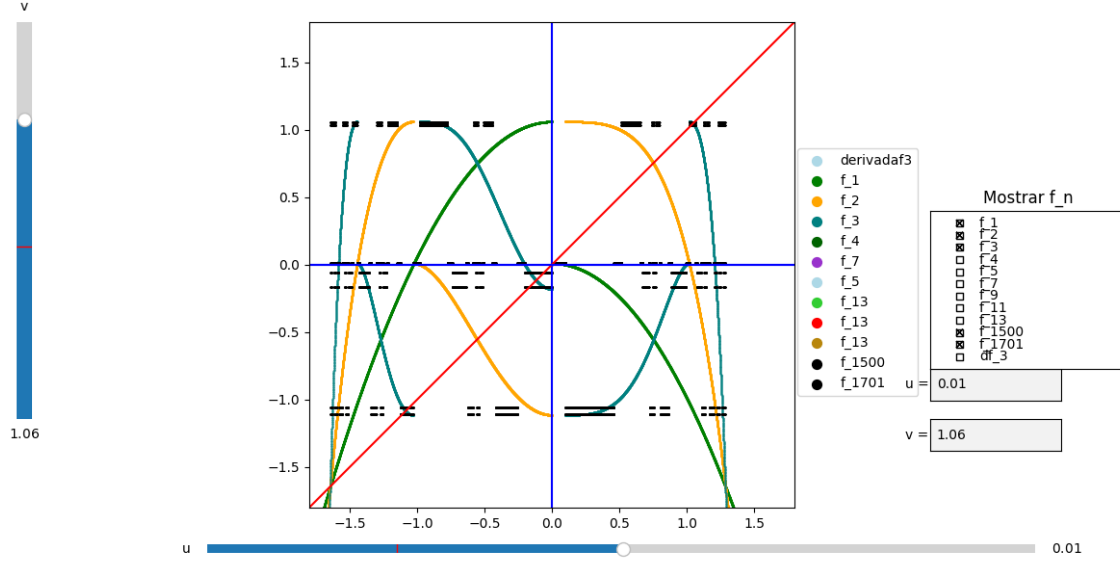


Figura 36: flip de f^3

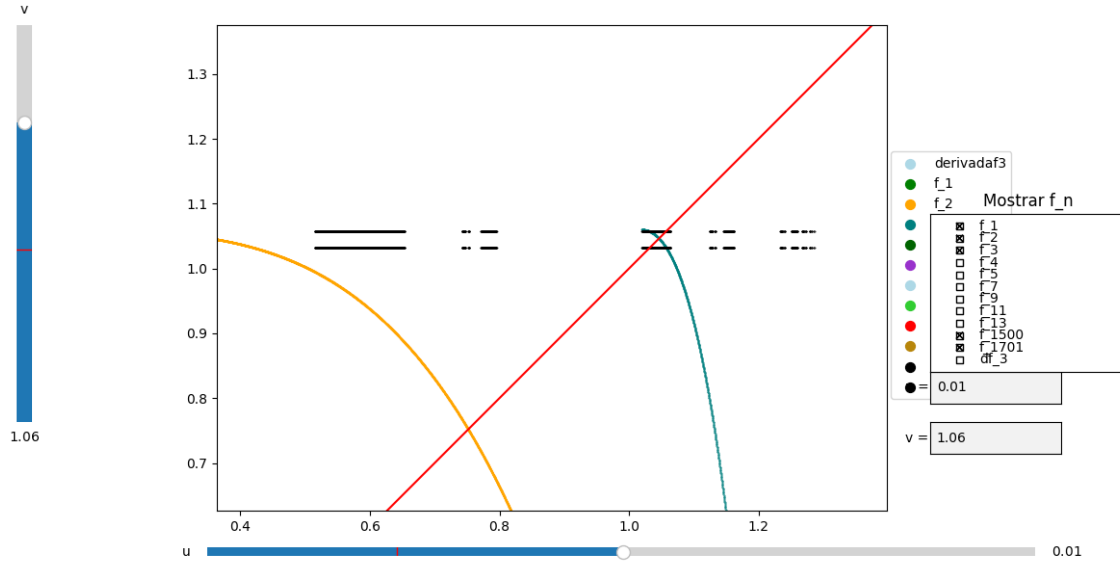


Figura 37: zoom para el flip de f^3

Si denotamos ahora por $\tilde{M}_2 > \tilde{z}_1$ el punto tal que $f_- \circ f_- \circ f_+(\tilde{M}_2) = M_2$, y consideramos cuando $\tilde{z}_1 < \nu < \tilde{M}_2$.

Entonces, $f_{-}of_{-}of_{+}(\nu) \in (M_2, \tilde{z}_1)$, y luego $f_{-}of_{+}of_{-}of_{-}of_{+}(\nu) \in (0, \sqrt{\mu})$. Esto es, la órbita de ν es atraída a la órbita atractora de periodo 2.

Esto quiere decir que la órbita atractora de periodo 6 satisface que el punto $x_6(\mu, \nu) \in (z_1, \tilde{z}_1)$ colapsó en $\nu = \tilde{z}_1$ y, luego, solo se ve, en $(z_1, \tilde{z}_1)$ una órbita repulsora de periodo tres.

Así nace un nuevo periodo de paz, donde todos los puntos que no sean preimágenes del 0, ni de cualquier órbita repulsora, son atraídas a $x_{+}(\mu)$ o a la órbita de periodo 2 si corresponde ($\mu > \frac{3}{4}$).

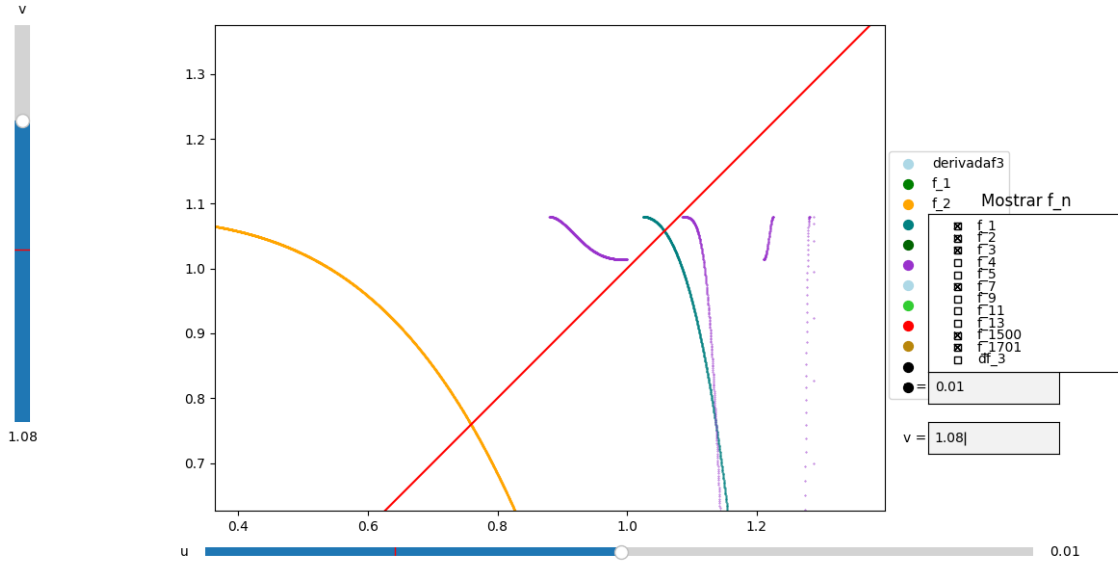


Figura 38: Aquí hay un espacio entre ambas bifurcaciones en la que se pierde la órbita del flip antes de que llegue el periodo 7, otro periodo de paz

Consideremos ahora $\tilde{z}_1 < \tilde{M}_2 < \tilde{x}_3^+ < \tilde{M}_1$, tales que $f_{-}of_{-}of_{+}(\tilde{x}_3^+) = x_3^+$, $f_{-}of_{-}of_{+}(\tilde{M}_1) = M_1$

Al mirar la siguiente figura, notamos que

agregar foto Notemos que

$$f_{-}of_{-}of_{+}([\tilde{M}_2, \tilde{x}_3^+]) = [x_3^+, x_+^2]$$

Aplicando ahora $f_{-}of_{+}$

$$f_{-}of_{+}of_{-}of_{-}of_{+}([\tilde{M}_2, \tilde{x}_3^+]) = f_{-}of_{+}[x_3^+, x_+^2] = [x_2^+, M_1]$$

Aplicando nuevamente,

$$f_{-}of_{+}of_{-}of_{+}of_{-}of_{-}of_{+}([\tilde{M}_2, \tilde{x}_3^+]) = f_{-}of_{+}[x_2^+, M_1] = [x_3^+, \nu]$$

Por lo tanto debe existir un punto $\tilde{\tilde{M}}_2$ entre $\tilde{M}_2$ y x_3^+ tal que

$$f_{-}of_{+}of_{-}of_{+}of_{-}of_{-}of_{+}(\tilde{\tilde{M}}_2) = \tilde{\tilde{M}}_2$$

y como $\tilde{M}_2$ satisfase

$$f_- \circ f_+ \circ f_- \circ f_+ \circ f_- \circ f_+ (\tilde{M}_2) = \nu$$

, existe un valor de ν , con $\tilde{M}_2 < \nu < \tilde{\tilde{M}}_2$, para el cual hay una órbita atractora de periodo 7 para f si ν es cercano, pero mayor, que $\tilde{M}_2$

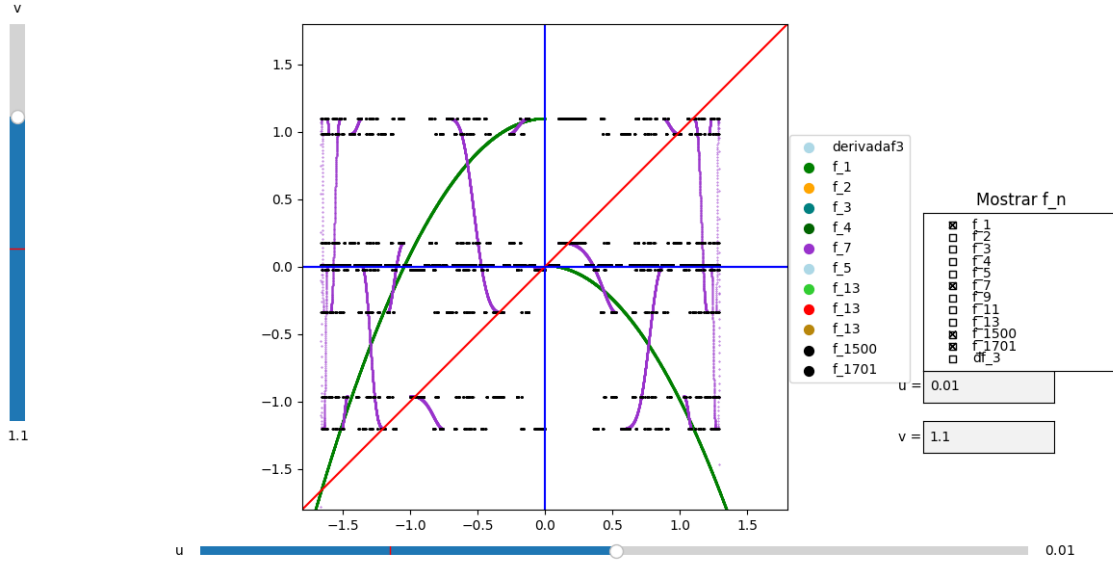


Figura 39: aquí ya existe la órbita atractora de periodo 7

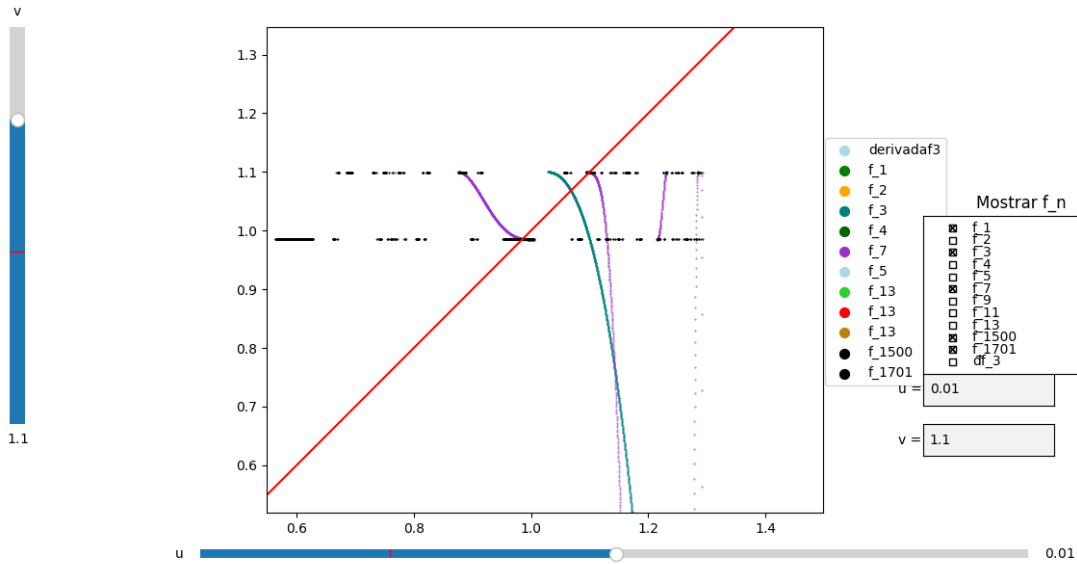


Figura 40: zoom figura anterior

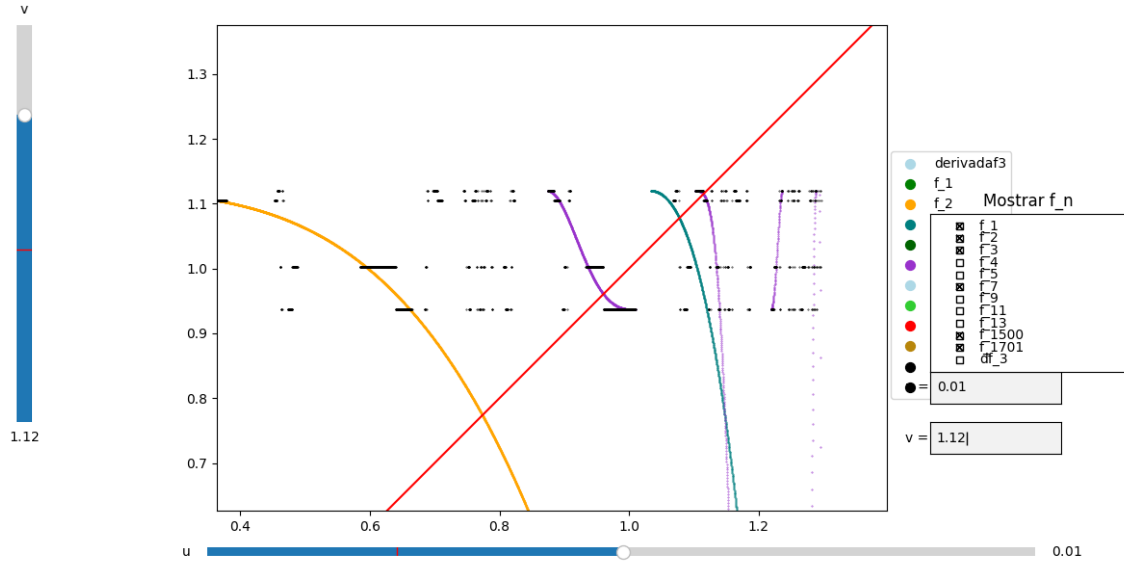


Figura 41: flip de f^7

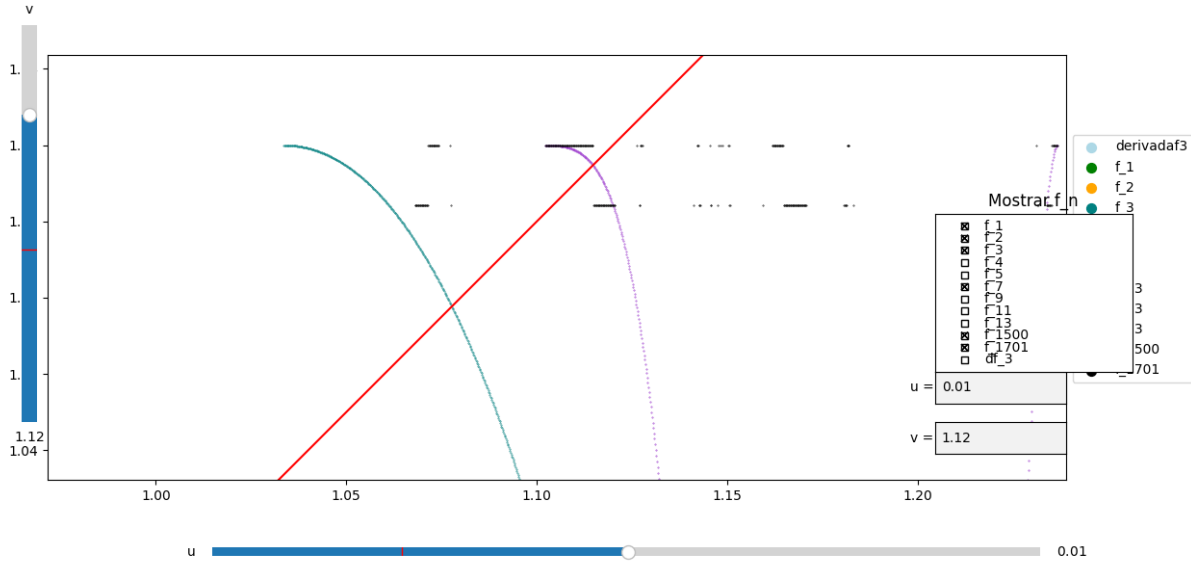


Figura 42: zoom figura anterior

Así, es razonable conjeturar que el mismo tipo de cascada de bifurcaciones que estudió Axel Silva en su tesis aparecerá para una sucesión de valores del parámetro

$$\nu_-^7 < \nu_+^7 < \nu_-^{13} < \nu_+^{13}, \dots$$

Donde f^i tendrá en el intervalo (ν_-^i, ν_+^i) una bifurcación de tipo flip.

O sea que, para $\nu > \nu_-^i$ cercano, habrá una órbita periódica atractora que terminará en una bifurcación de tipo flip, y esta a su vez tendrá un periodo de paz antes de

pasar a la siguiente, donde todo punto que no sea preimagen de los repulsores será atraída al punto fijo $x_+(\mu)$ o su correspondiente órbita atractora de periodo 2.

Definimos por $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_{i+2} = 2p_i + p_{i+1}$

Conjeturamos además que la sucesión $\nu_-^{p_i}, \nu_+^{p_i}$ tiene como límite el valor $\tilde{\nu}_\infty$ definido de la siguiente manera:

Sea $x_2(\mu, \nu)$ el punto periódico de periodo 2 definido para $f_- \circ f_+$, recordando que

$$\tilde{M}_2 < x_2(\mu, \nu) < \tilde{M}_1$$

Conjeturamos que $\tilde{\nu}_\infty$ satisface $\tilde{\nu}_\infty = \tilde{x}_2(\mu, \tilde{\nu}_\infty)$ A continuación, presentamos diversa evidencia numérica que sostienen nuestras conjeturas.

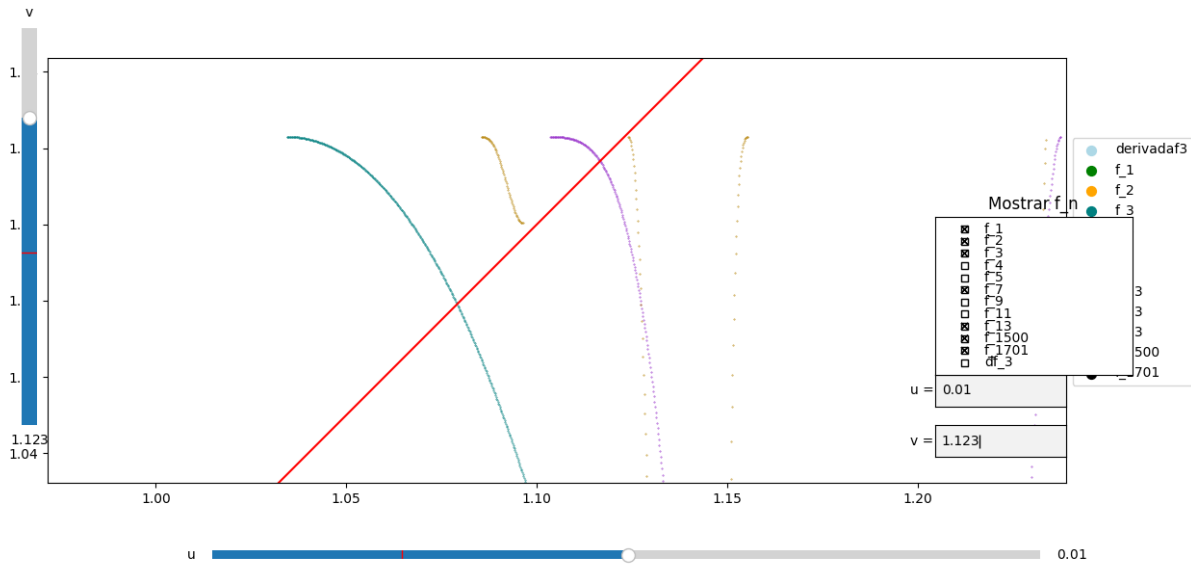


Figura 43: paz entre el flip de f^7 y el de f^{13}

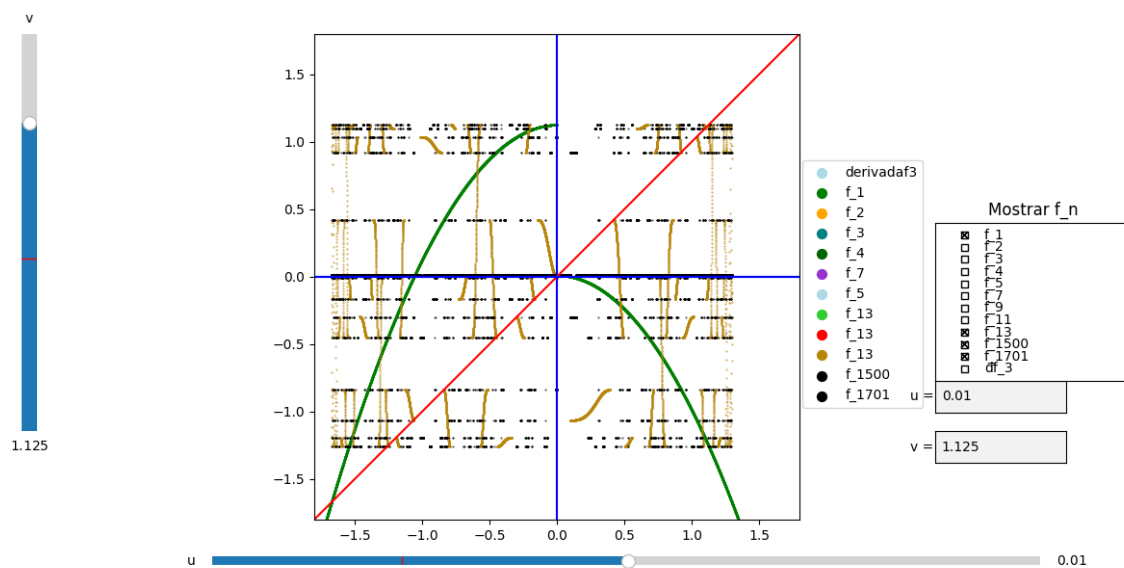


Figura 44: aparición del periodo 13

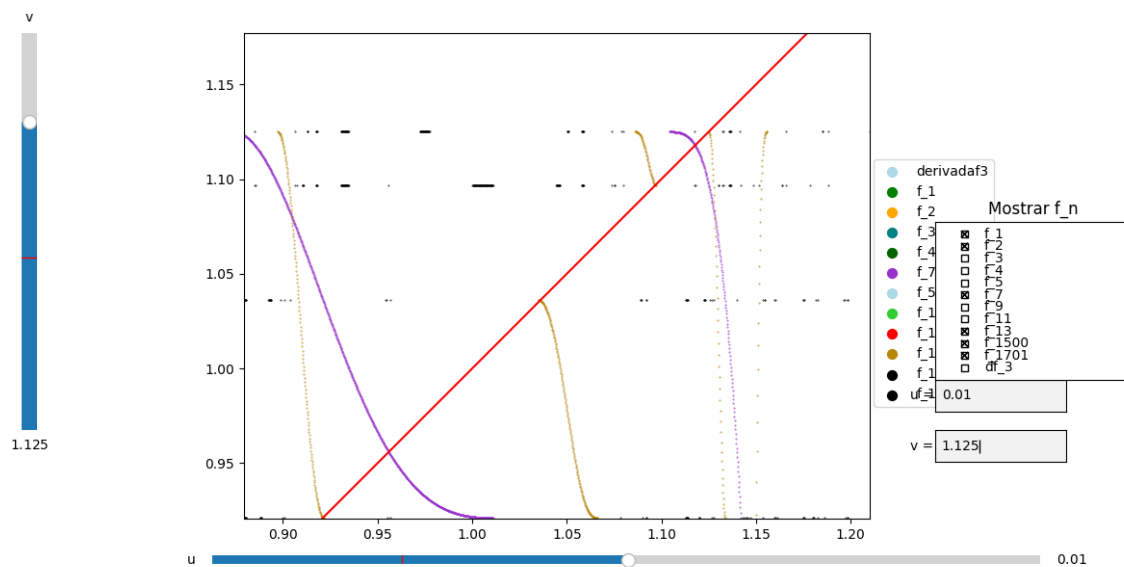


Figura 45: zoom figura anterior

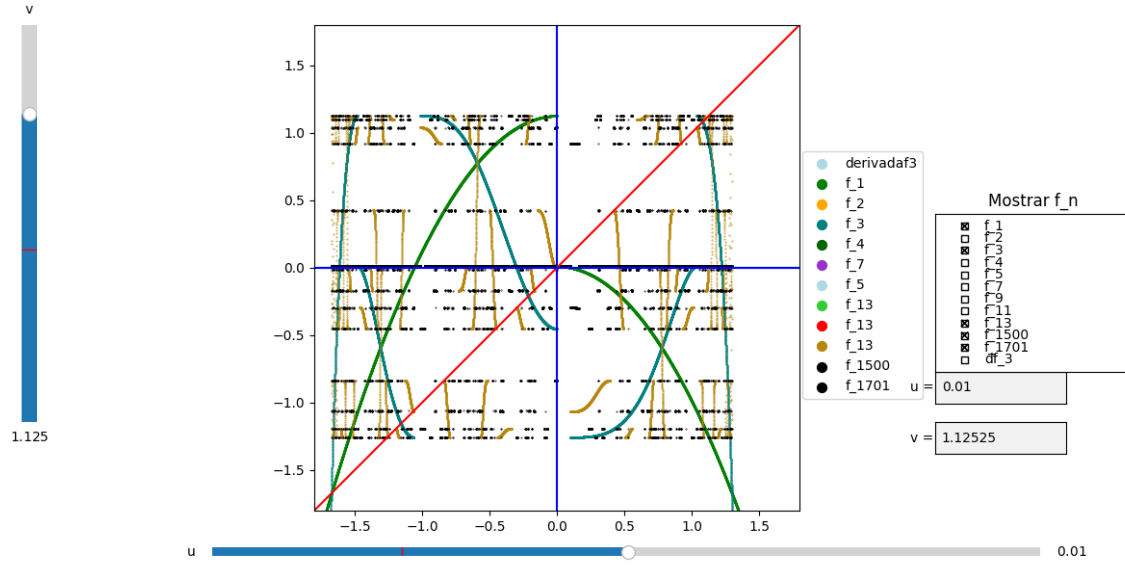


Figura 46: la separación de los puntos fijos de f^{13} (ahora orbita de periodo 2)

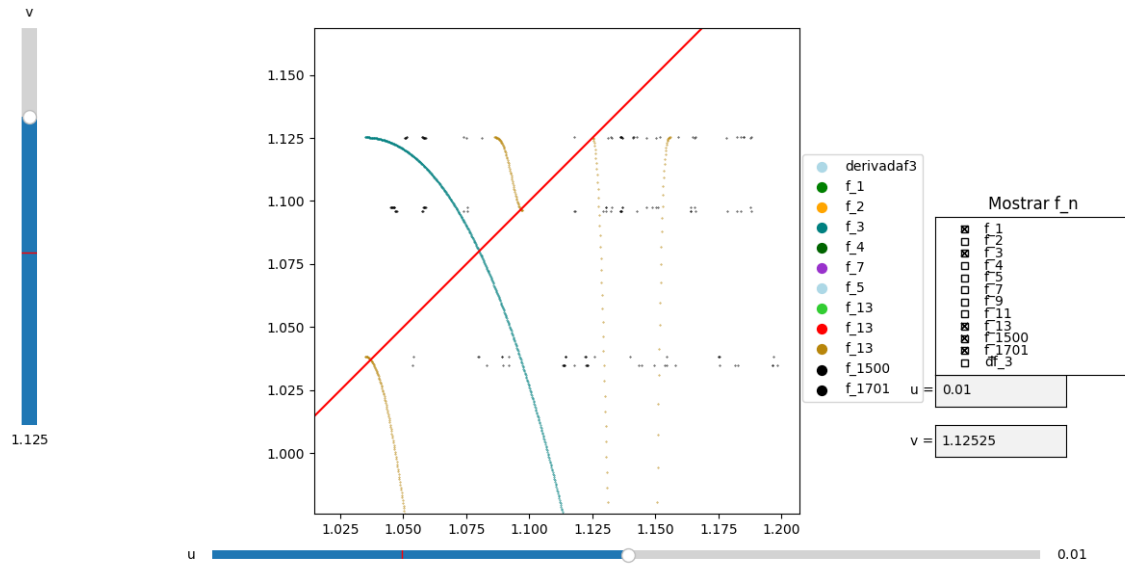


Figura 47: zoom en el flip de f^{13}

Previamente, en la construcción del shift de Milnor-Thurston hablamos del conjunto límite generado por f , nos referimos a este como *Los puntos que tienen una preimagen dentro de algún intervalo para cualquier iteración de f* . Agregamos definiciones alternativas que separan el punto límite del conjunto límite.

Definición 39. Sea $f : X \rightarrow X$ suave.

$y \in X$ es punto límite de f si $\exists x \in X$ y $n_i \rightarrow \infty$ tal que

$$f^{n_i} \rightarrow y, \text{ cuando } i \rightarrow \infty$$

De manera similar, el conjunto límite $\omega_f = \{y \in X \mid y \text{ es punto límite de } f\}$

La intuición y las simulaciones nos hacen creer que el siguiente caso marca el fin de las dinámicas cuyo conjunto límite es finito (y consecuentemente de entropía cero), y que cuando ν cruza esta curva(hacia arriba, positivamente) el sistema entra en una etapa en que el conjunto límite siempre va a contener un subconjunto invariante no enumerable y cuya dinámica tiene entropía positiva.

4.5.1. $\nu = \bar{x}(\mu, \nu)$

Mientras se varían los parámetros y se analiza cómo cambia el gráfico de la función, naturalmente se buscan gráficos(casos) que cubran de manera *ideal* los intervalos. Ya que estos casos tienen un representante simbólico evidente, nos proporcionan un lugar seguro para calcular entropía y generar intuición en vecindades de estos casos.

Así, estudiamos cuando

$$\nu = \hat{x}(\mu, \nu) \tag{58}$$

Recordemos que

$$f_\mu(\hat{x}(\mu, \nu)) = x_-(\nu), \quad f_\nu(x_-(\nu)) = x_-(\nu)$$

Con el propósito de orden, $\hat{x}(\mu, \nu) = \hat{x}$. Desarrollando lo anterior

$$f(\hat{x}) = \mu - \hat{x}^2$$

Por definición

$$\mu - \hat{x}^2 = x_-(\nu)$$

Aplicando nuestra restriccion inicial, 58

$$\mu = \nu^2 + x_-(\nu)$$

La restricción inicial sobre ν nos dio esta curva en el espacio de parámetros $\mu \times \nu$ que representa este caso.

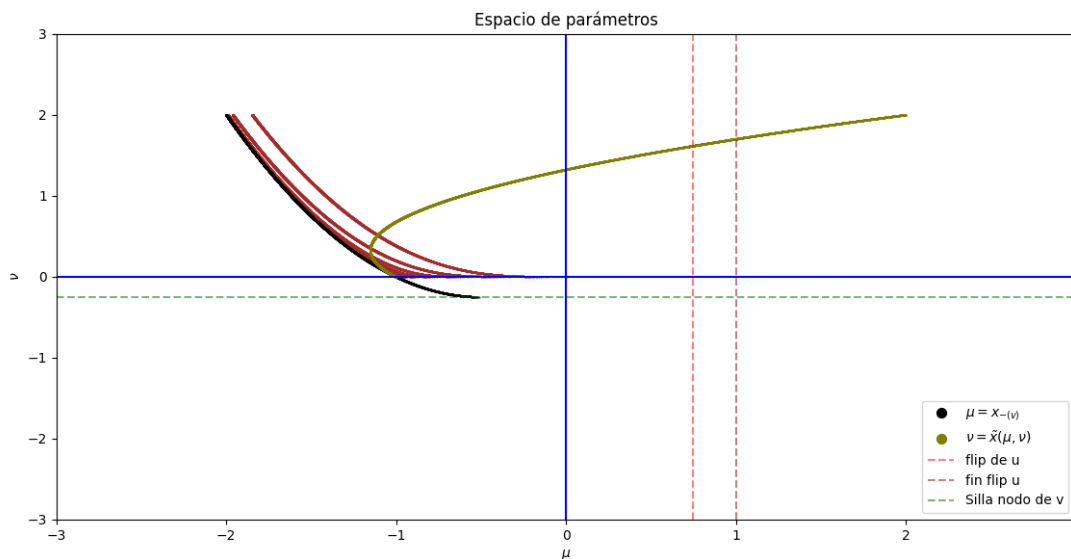


Figura 48: Curva que representa $\nu = \hat{x}(\mu, \nu)$ y las curvas $\mu = b_i$

Esta imagen nos da una idea general de la siguiente sección, que se dedicara completamente al estudio de esta curva.

5. Sobre una sucesión de dinámicas de entropía positiva que convergen a una dinámica de entropía nula

Previamente, estudiamos una serie de puntos, que son preimágenes del 0, desde el tramo negativo de la función. En el libro de Rafael Labarca, Solange Arancibia y Erik Inda, se estudian y utilizan técnicas para definir condiciones sobre la función y en los intervalos para que la dinámica generada esté en biyección con la de un shift de tipo finito. Metricamente, las elecciones radican en que la elección de los parámetros calce con preimágenes de puntos fijos repulsivos, definiendo los intervalos en función de ellos. La razón es que estos puntos específicos cortan las imágenes al iterar la función sobre los intervalos que definen, controlando el comportamiento límite intervalo a intervalo. De manera simbólica estos puntos cierran las órbitas críticas, que recogen la parte esencial de la dinámica generada.

Luego de revisar algunos ejemplos básicos, utilizaremos este procedimiento que, cerrando las órbitas en los intervalos, junto a la expansividad local (esta se tiene como consecuencia directa del teorema del valor medio excepto en el punto crítico) de las funciones nos garantiza y asocia directamente el shift de tipo finito y su matriz.

Para ejemplificar, miremos algunos de estos casos, comenzando con uno que antes dejamos fuera de la sucesión, pero podría ser considerado un cero de la función, supondremos cierto el teorema mencionado para este caso, sin embargo se irán marcando los pasos que evidencian su

Consideremos entonces:

$$\mu = 0, \quad \nu = \tilde{x}(\mu, \nu)$$

Si particionamos el intervalo, en base a las secciones de la función monótonas y continuas, tenemos:

1. $I_0 = (0, \tilde{x}(\mu, \nu))$
2. $I_1 = (x_-(\nu), 0)$

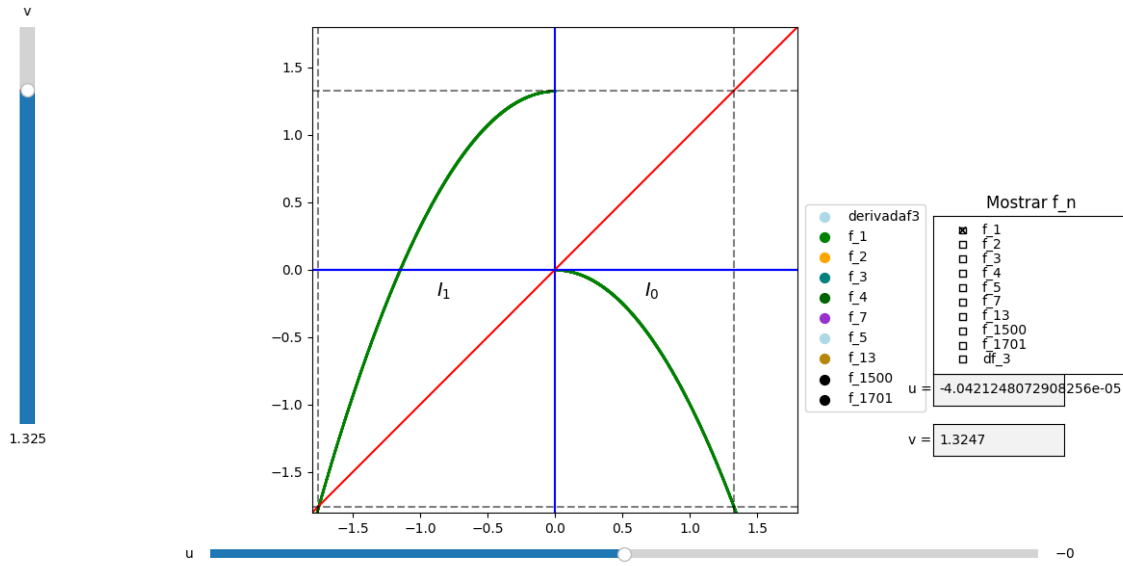


Figura 49: Gráfico de la función con los intervalos y parámetros mencionados

Sé que el orden del índice de los intervalos no es el *natural*, sin embargo facilitará una posterior inducción sobre este índice.

Haciendo zoom en la imagen, podemos restringir el intervalo para visualmente apreciar de manera clara, cómo los intervalos se cubren entre ellos vía $f_{\mu, \nu}$.

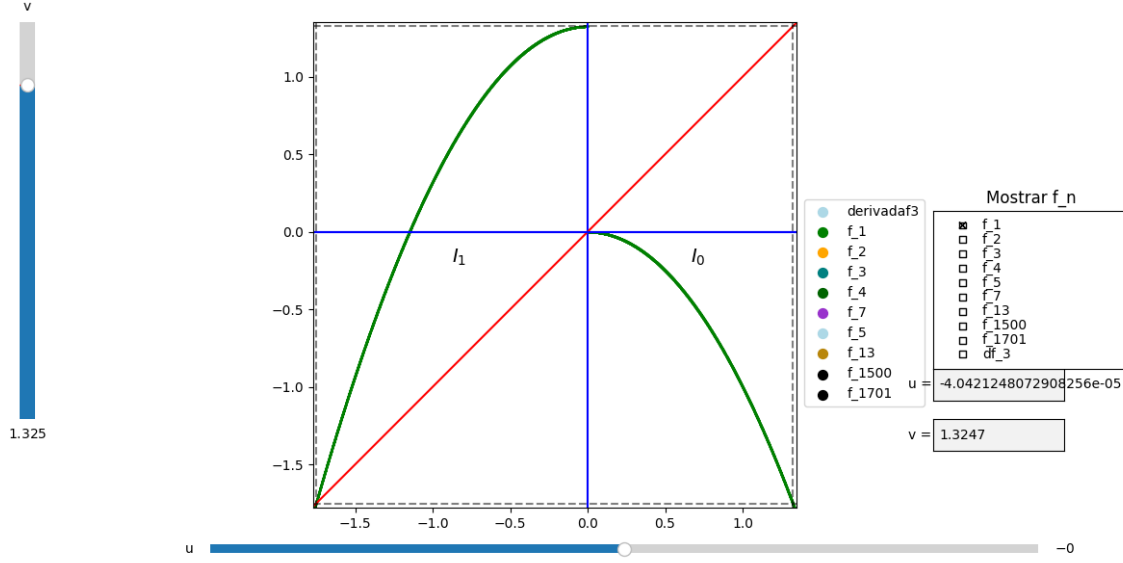


Figura 50: Zoom figura anterior

Creamos ahora el grafo asociado al cubrimiento de intervalos entre ellos vía $f_{\mu,\nu}$.



Figura 51: Grafo asociado a la dinámica generada por $f_{\mu,\nu}$ para $\mu = 0$, $\nu = \tilde{x}(\mu, \nu)$

El grafo anterior, está asociado al shift de Fibonacci, (la forma habitual tiene los vértices invertidos. esta matriz es su semejanste).

La asociación de este gráfico con la famosa sucesión, se entiende al mirar cómo crece la cantidad de palabras a medida que crece su largo, O expresando la regla de recurrencia de esta sucesión de manera matricial.

Por supuesto, la matriz asociada a este grafo, tiene como valor propio mayor el número de oro:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1 - \lambda) - (1)(1)$$

$$\Rightarrow \det(A_0 - \lambda I) = -\lambda(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Así, igualando a 0 para encontrar sus valores propios:

$$p_{A_0}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas:

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$$

Entonces, el valor de entropía topológica de la dinámica generada con estos parámetros, es

$$h_{top}(A_0) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 0,48121182506 > 0$$

Para continuar, recordemos b_i la sucesión de preimágenes del 0. Esta está definida por

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= -\sqrt{\nu} \\ f_{\mu,\nu}(b_{i-1}) &= b_i, \end{aligned}$$

Miremos entonces, un par de casos de esta sucesión y calculemos sus valores de entropía topológica:

Si consideramos $\mu = b_1$, y $\nu = \bar{x}(\mu, \nu)$, particionando de manera recurrente el intervalo(a partir de sus ceros, y como bordes de la partición el punto fijo $x_-(\nu)$ y su preimagen) dividiéndolo en este caso en 3 partes:

Ahora con $\mu = b_1$

1. $I_0 = (0, \tilde{x}(\mu, \nu))$
2. $I_1 = (b_1, 0)$
3. $I_2 = (x_-(\nu), b_1)$

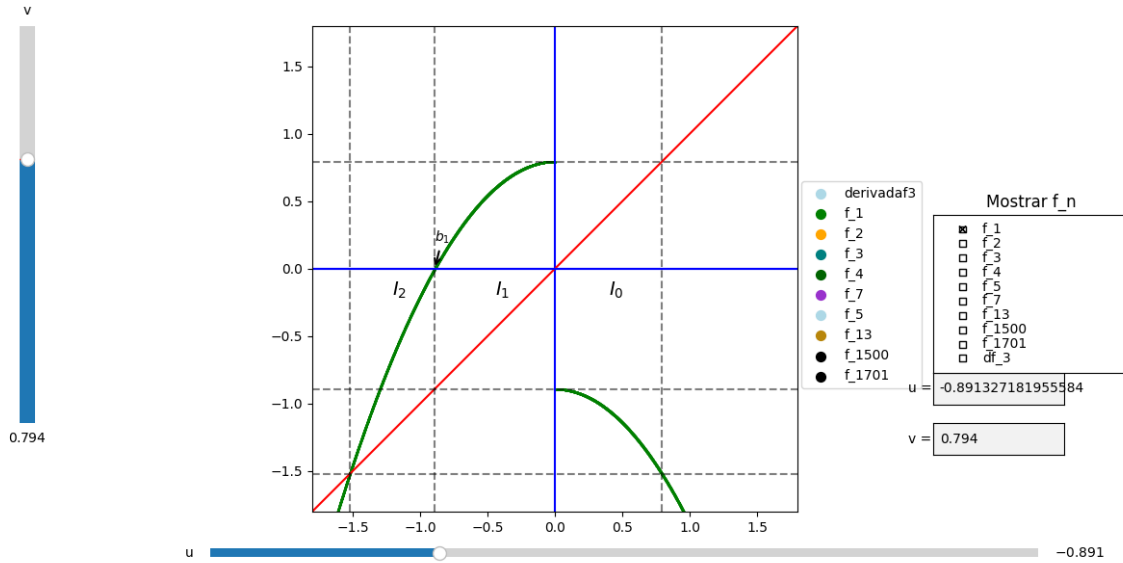


Figura 52: $f_{\mu,\nu}(x)$, tal que $(\mu, \nu) = (b_1(v), \tilde{x}(\mu, \nu))$

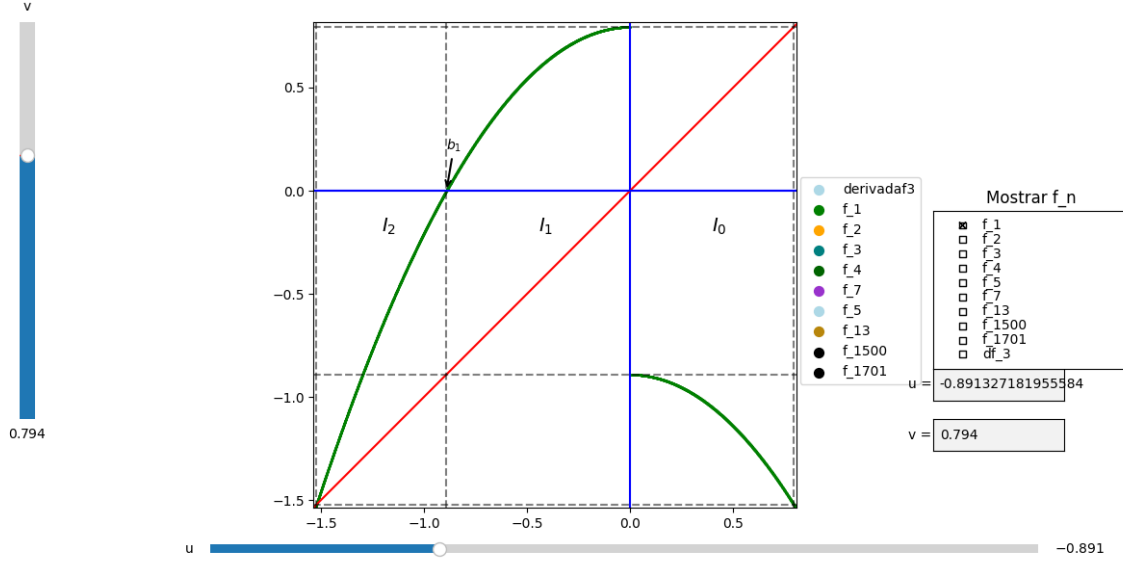


Figura 53: Zoom en $[x_-(\nu), \tilde{x}(\mu, \nu)]^2$. Se aprecia que $f_{\mu, \nu}(\tilde{x}(\mu, \nu)) = x_-(\nu)$

Creamos ahora el grafo asociado al cubrimiento de intervalos entre ellos vía $f_{\mu, \nu}$.

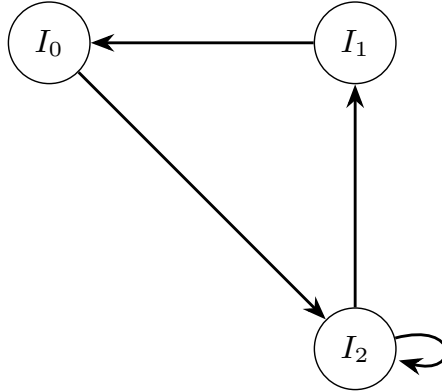


Figura 54: Grafo que representa el cubrimiento de los intervalos vía $f_{\mu, \nu}$ con $(\mu, \nu) = (b_1(v), \tilde{x}(\mu, \nu))$

Y calculamos la entropía de la dinámica generada por $f_{\mu, \nu}$ en este caso, a partir de la matriz asociada al grafo.

$$A_{b_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\det(A_{b_1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2(1-\lambda) - (1)(-1)$$

$$\Rightarrow \det(A_{b_1} - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 1$$

Igualando el polinomio característico a 0:

$$p_{A_{b_1}}(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 1 = 0 \quad (59)$$

Como antes, aplicamos el método de Cardano-Del Ferro-Tartaglia actualizado

Dada

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Calculamos

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

El discriminante

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Nos indica la naturaleza de las soluciones:

Para nuestra cúbica (59), tenemos:

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{29}{27}$$

Entonces

$$\Delta = \left(\frac{29}{27}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{27^2} = \frac{837}{2916} = \frac{31}{108} > 0$$

El discriminante nos indica que hay una única solución real (nuestra candidata a valor propio):

Así, en función de el discriminante, p y q , nuestra solución real es :

$$x = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{3a}$$

Evaluando con los valores calculados anteriormente, nuestra solución exacta es:

$$x = \left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}$$

Entonces la entropía topológica, para $(\mu, \nu) = (b_1, \tilde{x}(\mu, \nu))$

$$h_{top}(A_{b_1}) = \ln \left(\left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \right) \approx 0,38224508584003$$

Notemos que

$$0 < h_{top}(A_{b_1}) < h_{top}(A_0)$$

La entropía va disminuyendo a medida que crece el índice de $b_i = \mu$ y modifica su correspondiente $\nu = \tilde{x}(\mu, \nu)$.

De manera análoga a cuando igualamos denominadores de fracciones para contrastar una con otra, para comparar de manera clara la riqueza dinámica de los distintos shift generados, al considerar preimágenes del 0 de mayor orden, igualamos la cantidad de intervalos. Esto nos ayudará a chequear si hay alguna relación de contención entre las dinámicas generadas por los distintos pares de valores de parámetros.

Al igualar la cantidad de intervalos, por medio de la discretización del itinerario de los puntos en cada segmento de recta, se puede observar de manera natural la relación de contención entre ambas dinámicas, a partir de las palabras prohibidas asociadas a cada shift. Es decir, en términos de la riqueza de lenguaje generado.

Para ejemplificar lo anterior, agreguemos un intervalo en el caso $\mu = 0$ para compararlo con la dinámica asociada a $\mu = b_1$.

En este caso : $I_0 = (0, \tilde{x}(0, \nu))$, $I_1 = (b_1, 0)$, $I_2 = (x_-(\nu), b_1)$

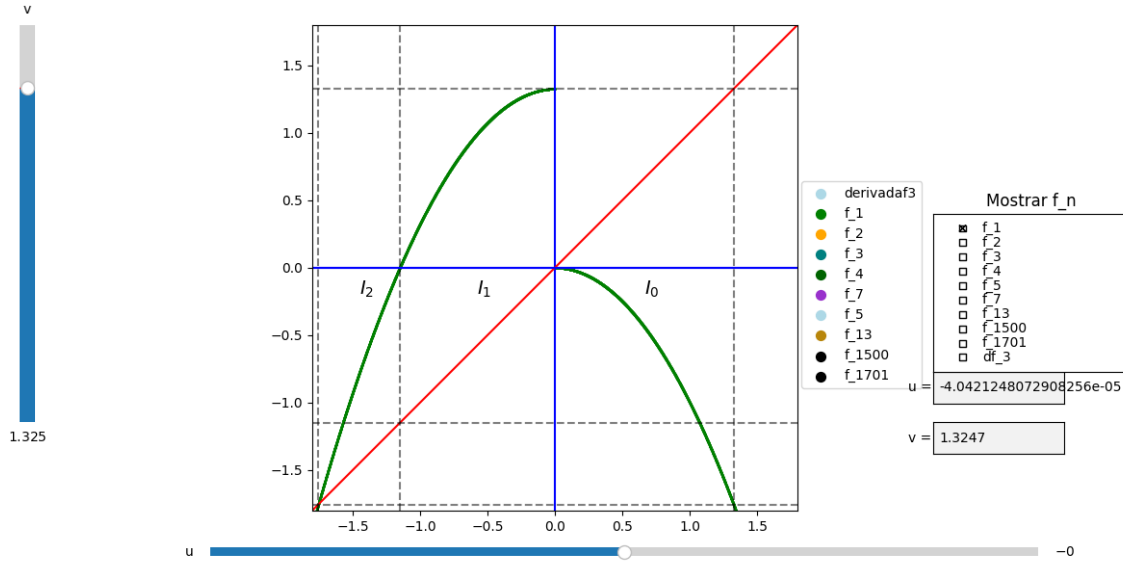


Figura 55: $(\mu, \nu) = (0, \tilde{x}(\mu, \nu))$. Intervalos análogos al caso $\mu = b_1$, pero con $\mu = 0$

Consideremos su matriz y grafo asociados:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

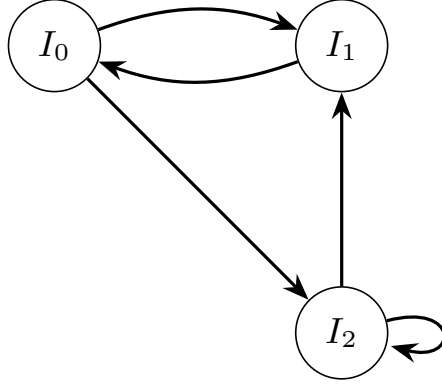


Figura 56: Grafo asociado a C_1

Al comparar ambos grafos, es fácil ver que la diferencia clave entre ellos está en la existencia de la arista $I_0 \rightarrow I_1$, que está ausente si $(\mu, \nu) = (b_1, \tilde{x}(\mu, \nu))$. En terminos de palabras prohibidas, se tiene que

$$\mathcal{F}_{A_{b_1}} = \{00, 01, 11, 12, 20\} \quad \mathcal{F}_{C_1} = \{00, 11, 12, 20\}$$

Nota: Estos shift tienen memoria 1 por lo que basta con checkear las palabras de largo 2 para analizar sus palabras prohibidas.

Claramente se tiene que

$$\mathcal{F}_{C_1} \subset \mathcal{F}_{A_{b_1}}$$

Esto tiene como consecuencia directa que sus shift asociados cumplan

$$\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_1}}} \subset \Lambda_{\mathcal{F}_{C_1}}$$

y además que

$$h_{top}(\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_1}}}) \leq h_{top}(\Lambda_{\mathcal{F}_{C_1}})$$

Efectivamente, en este caso la dinámica generada en $\mu = 0$ contiene a la generada en $\mu = b_1$.

Antes de probar esta contención para el resto de la sucesión b_i , mostraremos que al agregar de manera recurrente intervalos para describir la misma dinámica, los valores propios de su matriz asociada se mantienen y solo se agrega como valor propio el 0, con su orden en función de los intervalos agregados.

Este hecho trae como consecuencia que la entropía sea invariante a estos cambios. De esta manera, podemos considerar la siguiente familia de matrices asociadas al shift de Fibonacci, expresado en particiones de distinto tamaño:

Nuestra matriz inicial, con dos intervalos

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = F_0$$

Para comparar con el shift $\mu = b_1$, tres intervalos:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El siguiente sería:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

En general

$$F_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos el polinomio característico de F_k :

$$(F_k - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de esta matriz de manera más clara, le haremos las siguientes operaciones esenciales que aprovechan la simetría de la matriz para eliminar filas/columnas:

$$Columna_2 = Columna_2 - \lambda Columna_1$$

Sea entonces la matriz modificada

$$F'_k(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 - \lambda^2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{(k+2) \times (k+2)}$$

Así,

$$\det(F'_k) = (-1) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{(k+1) \times (k+1)}$$

Aplicando las operaciones análogas, podemos seguir reduciendo el tamaño de la matriz:

$$\det(F'_k) = (-1) \det \begin{pmatrix} (1 - \lambda^2) & (-\lambda^3 + \lambda + 1) & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

De manera similar,

$$\det(F'_k) = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} (-\lambda^3 + \lambda + 1) & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{k \times k}$$

En este tratamiento de la matriz, notemos que al reducir su tamaño, vamos acumulando la información en la primera entrada. Describamos la entrada en función de cuántas veces se ha eliminado una fila/columna:

1. $f_{11}(0) = -\lambda$
2. $f_{11}(1) = 1 - \lambda^2 = 1 + \lambda f_{11}(0)$
3. $f_{11}(2) = 1 + \lambda - \lambda^3 = 1 + \lambda f_{11}(1)$
4. $f_{11}(3) = 1 + \lambda + \lambda^2 - \lambda^4 = 1 + \lambda f_{11}(2)$
- $\vdots$
5. $f_{11}(k) = -\lambda^{k+1} + \lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + \lambda^0$

Calculamos el k -ésimo término para que nos quede una matriz de 2×2 , (la original es de $(k + 2 \times k + 2)$), de esta manera tenemos

$$\det(F'_k) = (-1)^k \cdot \det \begin{pmatrix} f_{11}(k) & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Finalizando

$$\det(F'_k) = (-1)^k \cdot (\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda)$$

Reordenando

$$\det(F'_k) = (-1)^k \cdot \lambda^k (\lambda^2 - \lambda^1 - 1)$$

Recordemos que $(\lambda^2 - \lambda^1 - 1)$ tiene como solución el número de oro y precisamente es el polinomio característico de A_0 .

Probamos entonces que no importa cuántas preimágenes del 0 adicionales consideremos para particionar el intervalo, la entropía se mantiene y sólo se agregan valores propios igual a 0 de orden k .

Ahora que tenemos la capacidad de adaptar la cantidad de intervalos para comparar dinámicas, veamos en general el caso $(\mu, \nu) = (b_k, \tilde{x}(\mu, \nu))$, y construyamos las k -matrices para comparar:

Para darnos una idea, el siguiente gráfico representa la función con $k + 1$ intervalos, con μ asociado al cero de orden k

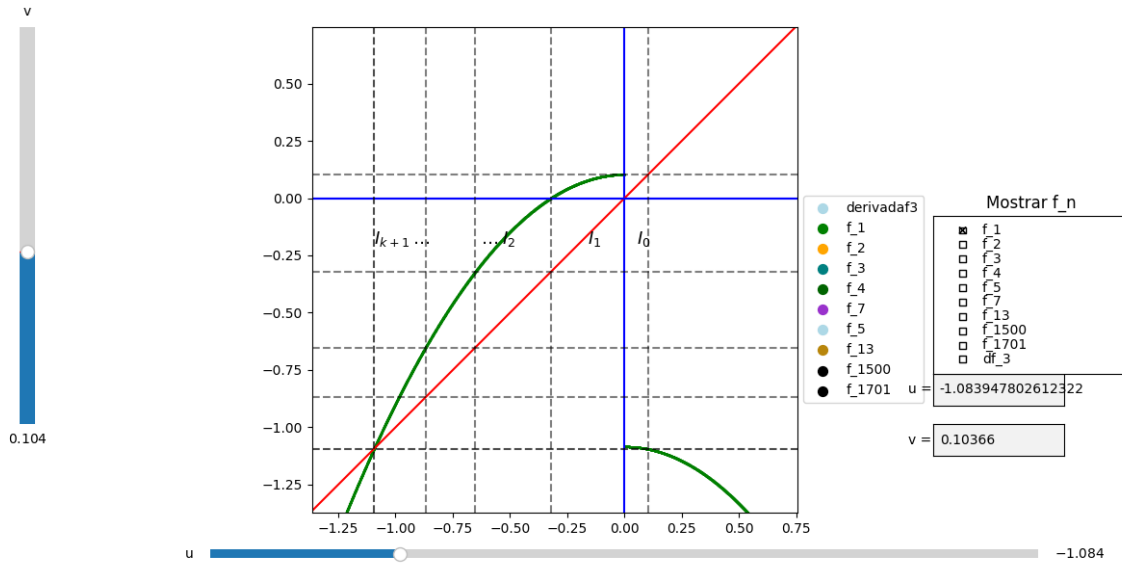


Figura 57: Gráfico que representa la partición con $k + 1$ intervalos, asociada a la matriz A_{b_k}

Construimos su grafo de manera recurrente. Aquí, resulta útil el indexado de los intervalos en dirección "opuesta", ya que al aumentar la cantidad de intervalos, el grafo mantiene su estructura esencial:

Un ciclo de $k + 2$ vértices unidireccionados, con el último intervalo agregado siendo el único con dos aristas, ya que éste se cubre a si mismo:

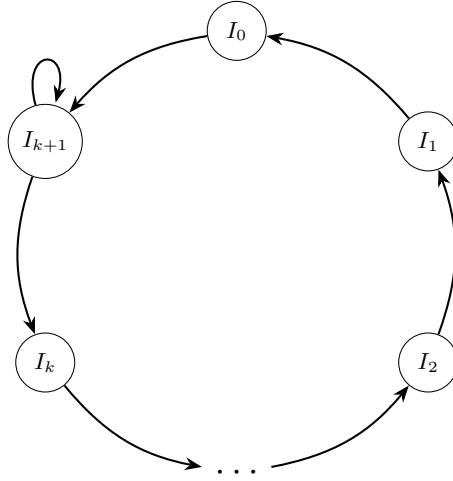


Figura 58: Grafo asociado a b_k

Y su matriz

$$A_{b_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{k+2}(\{1, 0\})$$

Si comparamos este grafo con el asociado a $\mu = 0$, con la misma cantidad de intervalos,

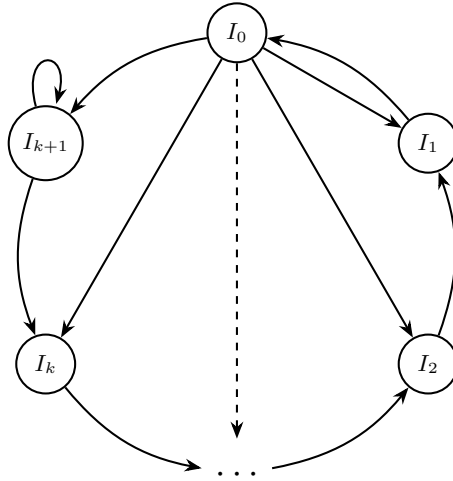


Figura 59: Grafo asociado a C_k

y su matriz comparativa C_k

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{k+2}(\{1, 0\})$$

La diferencia es evidente. Además, la riqueza de lenguaje también está fuertemente marcada. Comuniquemos lo anterior a partir de palabras prohibidas para cada grafo:

$$\mathcal{F}_{A_{b_k}} = \begin{cases} 0j & \text{si } j \neq k+1 \\ 1j & \text{si } j \neq 0 \\ 2j & \text{si } j \neq 1 \\ \vdots & \\ kj & \text{si } j \neq k-1 \\ (k+1)j & \text{si } j \neq k+1, k \end{cases}$$

En cambio,

$$\mathcal{F}_{C_k} = \begin{cases} 00 \\ 1j & \text{si } j \neq 0 \\ 2j & \text{si } j \neq 1 \\ \vdots & \\ kj & \text{si } j \neq k-1 \\ (k+1)j & \text{si } j \neq k+1, k \end{cases}$$

El intervalo 0, intervalo inicial marca toda la diferencia.
Se tiene entonces

$$\mathcal{F}_{C_k} \subset \mathcal{F}_{A_{b_k}}$$

Esto tiene como consecuencia directa que sus shift asociados cumplan

$$\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_k}}} \subset \Lambda_{\mathcal{F}_{C_k}}$$

y además que

$$h_{top}(\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_k}}}) \leq h_{top}(\Lambda_{\mathcal{F}_{C_k}})$$

Nota: Observemos que podríamos hacer lo mismo para comparar $\mathcal{F}_{A_{b_k}}$ con $\mathcal{F}_{A_{b_{k+1}}}$. O sea, agregar una fila, columna a $\mathcal{F}_{A_{b_k}}$, verificar que $\mathcal{F}_{A_{b_k}} \subset \mathcal{F}_{A_{b_{k+1}}}$ lo que trae como consecuencia que $\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_{k+1}}}} \subset \Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_k}}}$ y entonces obtenemos $h_{top}(\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_{k+1}}}}) \leq h_{top}(\Lambda_{\mathcal{F}_{A_{b_k}}})$. Con esto concluimos la contención de la dinámica en general cuando corre la sucesión. Trabajaremos ahora la matriz para hacer cálculos sobre su polinomio característico y obtener nociones de la entropía:

$$(A_{b_k} - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Aprovechamos la simetría de la matriz eliminando la primera y última fila para calcular el polinomio:

$$(A_{b_k} - \lambda I) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{matrix}} & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}} & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

De esta manera, tenemos

$$p_k(\lambda) = (-1)^{k+1} + (1 - \lambda)(-\lambda)^{k+1}$$

Resolviendo

$$p_k(\lambda) = (-1)^{k+1} + (-\lambda)^{k+1} + (-\lambda)^{k+2}$$

Factorizando

$$p_k(\lambda) = (-1)^{k+1} [-\lambda^{k+2} + \lambda^{k+1} + 1]$$

Ahora que tenemos el polinomio general, induciremos que para cada k , existe un punto $\lambda_k \in [1, 2]$ tal que $p_k(\lambda_k) = 0$.

Esto se traduce en que la entropía asociada a el logaritmo de los valores propios del polinomio, es -a lo menos- positiva.

Caso base de la inducción:

Si $k = 0$, tenemos $p_0(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$

$$p_0(1) = -1 < 0, \quad p_0(2) = 1 > 0,$$

Dada la continuidad de p_0 , el teorema de valor intermedio nos dice que existe $\lambda_0 \in (1, 2)$ tal que $p_0(\lambda_0) = 0$

Suponemos como **hipótesis de inducción** que dado k , $\exists \lambda_k$, que cumple

- $1 < \lambda_k < 2$
- $p_k(\lambda_k) = 0$

Buscamos una relación de recurrencia

$$p_{k+1}(\lambda) = (-1)^{k+2} [-\lambda^{k+3} + \lambda^{k+2} + 1]$$

Reordenando

$$p_{k+1}(\lambda) = (-1)^{k+2} [\lambda (-\lambda^{k+2} + \lambda^{k+1} + 1) - \lambda + 1]$$

Así

$$p_{k+1}(\lambda) = -\lambda p_k(\lambda) + (-1)^{k+2}(1 - \lambda)$$

Evaluyendo en 1, tenemos

$$p_{k+1}(1) = -p_k(1) = (-1)^{k+2} \quad (60)$$

Evaluyendo en λ_k , utilizando la **H.I.**, $p_k(\lambda_k) = 0$

$$p_{k+1}(\lambda_k) = (-1)^{k+2}(1 - \lambda_k) \quad (61)$$

Por hipótesis de inducción, $(1 - \lambda_k) < 0$.

60 y 61, nos permiten concluir que $p_{k+1}(1)$ y $p_{k+1}(\lambda_k)$ tienen distinto signo, de esta manera, dada la continuidad de los polinomios, el teorema del valor intermedio nos dice que existe $\lambda_{k+1} \in (1, \lambda_k) \subset [1, 2]$ que cumple

$$p_{k+1}(\lambda_{k+1}) = 0$$

Por principio de inducción, probamos que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists \lambda_k \quad \text{tal que}$$

$$1 < \lambda_k < 2$$

$$p_k(\lambda_k) = 0$$

Además, en el último paso inductivo, notamos la sucesión de 0's de polinomios, λ_k , es decreciente:

$$\lambda_{k+1} \in (1, \lambda_k) \implies \lambda_{k+1} < \lambda_k$$

Afirmamos que

$$\lambda_k \rightarrow 1, \quad \text{si } k \rightarrow \infty$$

En efecto, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$p_k(\lambda_k) = 0$$

Esto es lo mismo que

$$(-1)^{k+1} [-\lambda_k^{k+2} + \lambda_k^{k+1} + 1] = 0$$

Ya que $(-1)^{k+1} \neq 0$

$$[-\lambda_k^{k+2} + \lambda_k^{k+1} + 1] = 0$$

Considerando que $\lambda_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$

$$-\lambda_k + 1 + \frac{1}{\lambda_k^{k+1}} = 0$$

Reordenando

$$\lambda_k = - \left(1 + \frac{1}{\lambda_k^{k+1}} \right) \quad (62)$$

Supongamos que $\lambda_k \rightarrow \lambda_L > 1$, cuando $k \rightarrow \infty$, entonces, tomando el límite $k \rightarrow \infty$ en 62, nos queda que

$$\lambda_L = -(1 + 0) = -1$$

Lo anterior es una contradicción, ya que $\lambda_L > 0$ (Aquí podría agregar que por sandwich se va a 1, o que probamos que 1 es el ínfimo y como es decreciente se tiene que ir a 1, aunque no parece necesario) Así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 1$$

De esta manera, mostramos que existe sucesión de parámetros con valores de entropía positivos asociados a cada una, que convergen a un caso de entropía nula. Agregamos para finalizar la curva que representa esta situación en el espacio de parámetros limpio de otras curvas:

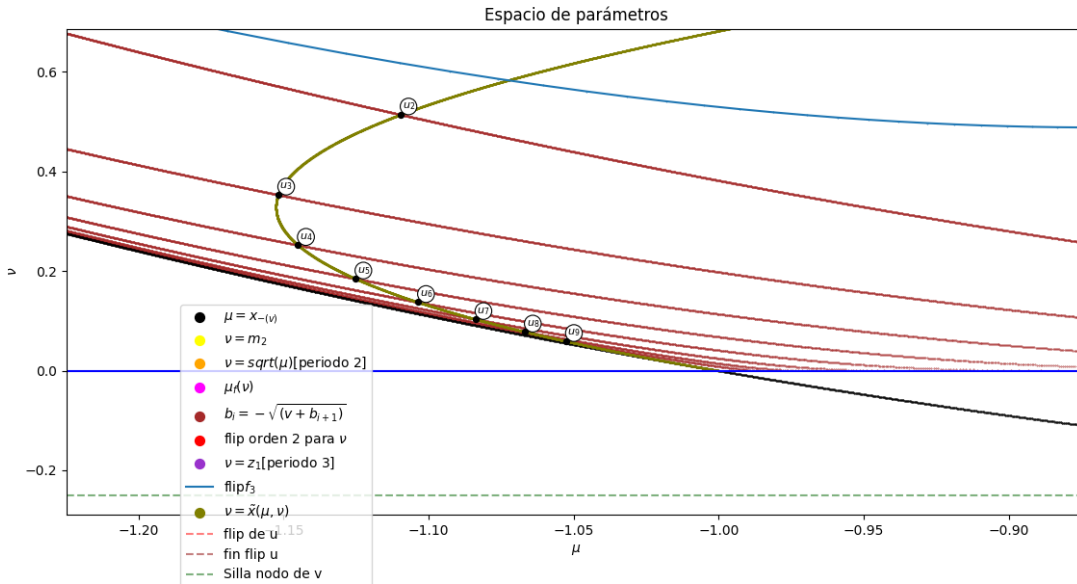


Figura 60: Cada intersección de $\hat{x}(\mu, \nu) = \nu$ con $\mu = b_i$ representa uno de los casos que estudiamos

5.0.1. Algunos cálculos entre los puntos de la sucesión de la curva $\hat{x}(\mu, \nu) =$ ν

condición de atrapamiento

Profe, revisemos esto y luego lo agrego. Lo tengo en papel.

6. Apéndice

Adjuntamos el código que utilizamos para graficar el espacio de parámetros y las iteraciones de las funciones, en una versión -más o menos- limpia.

Este código fue hecho con ensayo y error, probablemente acepte (y necesite) muchas mejoras.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import plotly.express as px
4 import sympy as smp
5 import scipy.optimize
6 from sympy import Function, Symbol
7 from matplotlib.widgets import Button, Slider
8 import sympy.utilities.lambdify as lambdify
9 from scipy.optimize import fsolve
10 df=px.data.tips()
11 #funcion por tramo numpy
12 def f(x,u,v):
13     return np.piecewise(x, [x>0, x==0, x<0],[lambda t:u-np.power(t,2), la
14 def fn(x,u,v,n=10):
15     for i in range(n):
16         y = f(x,u,v)
17         x = y
18     return x
19 #ploteo matplotlib
20 def plot(f,xrange,kolor,ax=None,etiq=None):
21     if ax is None:
22         fig = plt.figure()
23         ax = fig.add_subplot(111)
24
25     #ax.scatter(xrange,f(xrange),marker='.',c=kolor,s=0.5)
26     return ax.scatter(xrange,f(xrange),marker='.',c=kolor,s=.5,label=etiq
27 def plot2(f,xrange,kolor,ax=None,etiq=None):
28     if ax is None:
29         fig = plt.figure()
30         ax = fig.add_subplot(111)
31
32     #ax.scatter(xrange,f(xrange),marker='.',c=kolor,s=0.5)
33     return ax.scatter(f(xrange),xrange,marker='.',c=kolor,s=.5,label=etiq
```

```

34 def plot_param(u, v, prange, kolor, ax=None, etiq=None):
35     if ax is None:
36         fig = plt.figure()
37         ax = fig.add_subplot(111)
38
39     U = u(prange)
40     V = v(prange)
41     return ax.scatter(U, V, marker='.', c=kolor, s=.5, label=etiq)
42
43 # grid peque o para x
44 x_small = np.linspace(0.01, 2, 300)
45 U, V = [], []
46
47 for x in x_small:
48     coefs = [64*x**2, 0, -64*x**3, 8*x, -1]
49     y_roots = np.roots(coefs)
50     y_real = y_roots[np.isreal(y_roots)].real
51     y = y_real[0] # elige la ra z que corresponda
52     U.append(x**2 + y)
53     V.append(y**2 + 1/(8*x*y))
54
55 # Convertir a arrays
56 U = np.array(U)
57 V = np.array(V)
58
59 # Opcional: ordenar por U para que la curva sea suave
60 sort_idx = np.argsort(U)
61 U = U[sort_idx]
62 V = V[sort_idx]
63
64 #Dominio de u
65 x = np.linspace(-2,2,25000,endpoint=False)
66 a = np.linspace(1e-4, 1-1e-4, 25000)
67
68 def signo_abs(x):
69     return np.where(np.abs(x) < 1, -1, 1)
70 def df3(x,u,v):
71     A=(-2)**3*(fn(x,u=u,v=v,n=2))*f(x,u=u,v=v)*x
72     return signo_abs(A)
73 def u_m2(a):
74     return ((1/np.sqrt(a) - a)/2)**2
75
76 def v_m2(a):
77     return (1/np.sqrt(a) - a)/2 + a
78
79

```

```

80 #ALGUNAS BIFURCACIONES CUADRANTE 2 DE PREIMAGENES DEL 0
81 def u_2(v):
82     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v))
83 def u_3(v):
84     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))
85 def u_4(v):
86     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v))))
87 def u_5(v):
88     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))))
89 def u_6(v):
90     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))))
91 def u_7(v):
92     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))))
93 def u_8(v):
94     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))))
95 def u_9(v):
96     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))))
97 def u_2(v):
98     return -np.sqrt(v+np.sqrt(v))
99
100 #esta funcion es la solucion de  $-x_+v_-(u_- - x_- **2)**2, 4*x_-(u_- - x_- **2)+1$ 
101 def single_x_solution(u):
102     #unica sol
103     A_u = np.cbrt(np.sqrt(3) * np.sqrt(27 - 64 * u**3) + 9)
104     return 2 * u / (np.cbrt(3) * A_u) + A_u / (2 * np.power(3, 2/3))
105
106 def curva_flip2(u):
107     x1 = single_x_solution(u)
108     return 1 / (16 * x1**2) + x1
109 def three_x_solutions(u):
110     #lista con 3 soluciones
111     theta = np.arccos( 3/(8*u)*(-3/-u)**(1/2))
112     return [2 * np.sqrt(u / 3) * np.cos((theta + 2 * k * np.pi) / 3) for
113
114 def v_u_multiple(u):
115     x = three_x_solutions(u)[0]
116     return 1 / (16 * x**2) + x
117 def v_z1(u):
118     A=np.cbrt(128*np.power(u,3)+3*np.sqrt(3)*np.sqrt(256*np.power(u,3)+27)
119     B=np.sqrt(A/np.cbrt(2)+16*np.cbrt(2)*np.power(u,2)/(A)+4*u)/(2*np.sqrt(3))
120     C=np.sqrt(-A/(3*np.cbrt(2))-16*np.cbrt(2)*np.power(u,2)/(3*A)-2*np.sqrt(3))
121     D=np.sqrt(-A/(3*np.cbrt(2))-16*np.cbrt(2)*np.power(u,2)/(3*A)+2*np.sqrt(3))
122     return [-B-C,C-B,B-D,B+D]
123 def x_gorrof(v):
124     gorrox=v*v-((1+np.sqrt(1+4*v))/2)
125     return gorrox

```

```

126 def u_sn3(x):
127     return x**2 + np.sqrt(x**4-x**2)
128 def v_sn3(x):
129     return x**4
130 def u_z1(x):
131     return x**4-x
132 def v_z1(x):
133     return x**2
134
135 a1 = np.linspace(0, 2, 15000)
136 a2 = np.linspace(1, 5, 15000)
137 #figura 2, espacio de par metros
138 fig_2 = plt.figure()
139 ax2 = fig_2.add_subplot(111)
140 ax2.axhline(y=0, color='blue')
141 ax2.axvline(x=0, color='blue')
142 #ploteos
143 plot2(lambda x:u_2(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
144 plot2(lambda x:u_3(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
145 plot2(lambda x:u_4(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
146 plot2(lambda x:u_5(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
147 plot2(lambda x:u_6(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
148 plot2(lambda x:u_7(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
149 plot2(lambda x:u_8(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
150 plot2(lambda x:u_9(x),x,ax=ax2,kolor='brown')
151 plot2(lambda x:-((1+np.sqrt(1+4*x))/2),x,ax=ax2,kolor='black',etiq=r'$\mu$')
152
153 plot_param(u_m2, v_m2, a, kolor='yellow', ax=ax2, etiq=r'$\nu=m_2$')
154 plot(lambda x:np.sqrt(x),x,ax=ax2,kolor='orange',etiq=r'$\nu=\sqrt{\mu}$')
155 plot2(lambda x:(1+np.sqrt(1-4*(-((1+np.sqrt(1+4*x))/2))))/2,x,ax=ax2,kolor='brown')
156
157 plot2(lambda x:-np.sqrt(x),x,ax=ax2,kolor='brown',etiq=r'$b_i=-\sqrt{(v+u)}$')
158 plot(lambda x:curva_flip2(x),x,ax=ax2,kolor='red',etiq=r'flip_orden_2_pa')
159 plot(lambda x: v_u_multiple(x),x,ax=ax2,kolor='red')
160 plot_param(u_z1, v_z1, a2, kolor='darkorchid', ax=ax2,etiq=r'$\nu=z_1$')
161 ax2.scatter(U, V, marker='.', s=.5)
162 ax2.plot(U,V,label=r'flip$f_3$')
163
164 plot2(lambda x: x*x-((1+np.sqrt(1+4*x))/2),a1,ax=ax2,kolor='olive',etiq=r'$\nu=z_1$')
165
166 """"***** Fin espacio par metros*****
167
168
169 v=0.10366
170 u=np.power(v,2)+-((1+np.sqrt(1+4*v))/2)
171 #valores de preimagenes del 0

```

```

172 M_1=np.sqrt(u)
173 M_2=np.sqrt(u+np.sqrt(v-np.sqrt(u)))
174 m_1=np.sqrt(v-M_1)
175 m_2=np.sqrt(v-M_2)
176 z_1=np.sqrt(u+np.sqrt(v))
177 z_12=np.sqrt(u+np.sqrt(v+np.sqrt(v-np.sqrt(u+np.sqrt(v)))))
178 z_2=np.sqrt(u+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))
179 z_3=np.sqrt(u+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v))))
180 z_4=np.sqrt(u+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))))
181
182
183
184 ax2.axvline(x=0.75,label='flip_de_u',color='red',linestyle='—',alpha=0.5)
185
186 ax2.axvline(x=1,label='fin_flip_u',color='darkred',linestyle='—',alpha=0.5)
187 ax2.axhline(y=-0.25,label='Silla_nodo_de_v',color='darkgreen',linestyle='—')
188 #config fig2
189 ax2.set_xlim(-3,3)
190 ax2.set_ylim(-3,3)
191 ax2.legend(markerscale=20,loc=4,draggable=True)
192 ax2.set_title(label="Espacio_de_par metros")
193 ax2.set_xlabel(xlabel=r'$\mu$')
194 ax2.set_ylabel(ylabel=r'$\nu$')
195
196 #aqui se arma la figura1
197 fig = plt.figure()
198 ax = fig.add_subplot(111)
199
200 caja_b=(-1.8,1.8)
201
202 ax.axhline(y=0, color='blue')
203 ax.axvline(x=0, color='blue')
204 ax.plot(x,x,color='red')
205 ax.set_ylim(caja_b)
206 ax.set_xlim(caja_b)
207 valorv=-((1+np.sqrt(1+4*v))/2)
208 valorv1=np.sqrt(u-valorv)
209 ax.axhline(y=0, color='blue')
210
211 b_1=np.sqrt(v)
212 b_2=np.sqrt(v+np.sqrt(v))
213 b_3=np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v)))
214 b_4=np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v+np.sqrt(v))))
215 x_v=-((1+np.sqrt(1+4*v))/2)
216 x_v_gorro=np.sqrt(u-x_v)
217

```

```

218 df_3=plot(lambda x: df3(x,u=u,v=v),x,ax=ax,kolor='lightblue',etiq='derivad
219 f_1=plot(lambda x: f(x,u=u,v=v),x,ax=ax,kolor='green',etiq='f_1')
220 f_2=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=2),x,ax=ax,kolor='orange',etiq='f_2')
221 f_3=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=3),x,ax=ax,kolor='teal',etiq='f_3')
222 f_4=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=4),x,ax=ax,kolor='darkgreen',etiq='f_4')
223 f_7=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=7),x,ax=ax,kolor='darkorchid',etiq='f_7')
224 f_5=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=5),x,ax=ax,kolor='lightblue',etiq='f_5')
225 f_9=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=9),x,ax=ax,kolor='limegreen',etiq='f_13')
226 f_11=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=11),x,ax=ax,kolor='red',etiq='f_13')
227 f_13=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=13),x,ax=ax,kolor='darkgoldenrod',etiq=
228 """
229 f_27=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=27),x,ax=ax,kolor='lightblue',etiq='f_2
230 f_53=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=53),x,ax=ax,kolor='red',etiq='f_53')
231 """
232 f_15=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=1500),x,ax=ax,kolor='black',etiq='f_150
233 f_17=plot(lambda x: fn(x,u=u,v=v,n=1701),x,ax=ax,kolor='black',etiq='f_170
234 ax.set_aspect('equal')
235 ax.legend(markerscale=20,loc=4,draggable=True)
236
237
238 #-----Interactivos-----
239
240 #slider v
241 axamp = fig.add_axes([0.1, 0.25, 0.0225, 0.63])
242 amp_slider = Slider(
243     ax=axamp,
244     label="v",
245     valmin=-1.2,
246     valmax=1.8,
247     valinit=v,
248     orientation="vertical")
249 # otro slider pa u
250 axfreq = fig.add_axes([0.25, 0.03, 0.63, 0.03])
251 u_slider = Slider(
252     ax=axfreq,
253     label='u',
254     valmin=-2,
255     valmax=2,
256     valinit=u,
257 )
258 from matplotlib.widgets import TextBox
259
260 # Caja de texto para u
261 axbox_u = fig.add_axes([0.8, 0.28, 0.1, 0.05])
262 text_box_u = TextBox(axbox_u, 'u=', initial=str(u))
263

```

```

264 # Caja de texto para v
265 axbox_v = fig.add_axes([0.8, 0.2, 0.1, 0.05])
266 text_box_v = TextBox(axbox_v, 'v=', initial=str(v))
267
268 def submit_u(text):
269     try:
270         val = float(text)
271         u_slider.set_val(val)
272     except ValueError:
273         pass
274
275 def submit_v(text):
276     try:
277         val = float(text)
278         amp_slider.set_val(val)
279     except ValueError:
280         pass
281
282 text_box_u.on_submit(submit_u)
283 text_box_v.on_submit(submit_v)
284
285
286
287 from matplotlib.widgets import CheckButtons
288
289 # Agregamos f_13 y las curvas grandes
290 iter_curves_fig = {
291     'f_1': f_1,
292     'f_2': f_2,
293     'f_3': f_3,
294     'f_4': f_4,
295     'f_5': f_5,
296     'f_7': f_7,
297     'f_9': f_9,
298     'f_11': f_11,
299     'f_13': f_13,
300     'f_1500': f_15,
301     'f_1701': f_17,
302     'df_3': df_3,
303 }
304
305 # Panel checkbuttons para mostrar/ocultar curvas
306 rax1 = fig.add_axes([0.8, 0.33, 0.15, 0.25])
307 labels1 = list(iter_curves_fig.keys())
308 visibility1 = [True]*len(labels1)
309 check_iter = CheckButtons(rax1, labels1, visibility1)

```

```

310 rax1.set_title("Mostrar_f_n")
311
312 def toggle_curve(label):
313     visible = not iter_curves_fig[label].get_visible()
314     iter_curves_fig[label].set_visible(visible)
315     fig.canvas.draw_idle()
316
317 check_iter.on_clicked(toggle_curve)
318
319
320
321 #Graficos intervalos
322 #ax.annotate(r'$b_1$', xy=(b_1,0), xytext=(b_1,0.2), arrowprops=dict(arrowstyle='>'))
323 """
324 ax.annotate(r'$I_{k+1} \dots$', xy=((x_v+b_2)/2,0), xytext=(x_v,-0.2), fontweight='bold')
325 ax.annotate(r'$\dots I_2$', xy=((b_2+b_1)/2,0), xytext=(b_2*0.98,-0.2), fontweight='bold')
326 ax.annotate(r'$I_1$', xy=(b_1/2,0), xytext=(b_1/2,-0.2), fontsize=13, fontweight='bold')
327 ax.annotate(r'$I_0$', xy=(np.sqrt(u+(1+np.sqrt(1+4*v))/2),0), xytext=(x_v,-0.2), fontweight='bold')
328
329 #M_i y m_i
330
331 ax.annotate(r'$M_1$', xy=(M_1,0), xytext=(M_1,0), fontsize=13, fontweight='bold')
332 ax.annotate(r'$M_2$', xy=(M_2,0), xytext=(M_2,0), fontsize=13, fontweight='bold')
333 ax.annotate(r'$m_1$', xy=(m_1,0), xytext=(m_1,0), fontsize=13, fontweight='bold')
334 ax.annotate(r'$m_2$', xy=(m_2,0), xytext=(m_2,0), fontsize=13, fontweight='bold')
335 """
336 def update(val):
337     u_val = u_slider.val
338     v_val = amp_slider.val
339     iter_funcs = {
340         'f_1': lambda x: f(x, u=u_val, v=v_val),
341         'f_2': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=2),
342         'f_3': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=3),
343         'f_4': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=4),
344         'f_5': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=5),
345         'f_7': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=7),
346         'f_9': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=9),
347         'f_11': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=11),
348         'f_13': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=13),
349         'f_1500': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=1500),
350         'f_1701': lambda x: fn(x, u=u_val, v=v_val, n=1701),
351         'df_3': lambda x: df3(x, u=u_val, v=v_val),
352     }
353
354 # ——— actualizar curvas ———
355 for label, func in iter_funcs.items():

```

```

356         y_vals = func(x) # usa x global definido fuera del update
357         iter_curves_fig[label].set_offsets(np.column_stack((x, y_vals)))
358
359
360     fig.canvas.draw_idle()
361
362
363
364
365 # update con los dos slider
366 amp_slider.on_changed(update)
367 u_slider.on_changed(update)
368 plt.show()

```

Referencias

- [1] Labarca, R. *La Entropía topológica, propiedades generales y algunos cálculos en el caso del shift de Milnor-Thurston*. Con la colaboración de Solange Aranzubia V. y Erick Inda R.IVIV, Venezuela, 2011. Libro de, 150
- [2] D. Lind and B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] J. Milnor and W. Thurston, *On Iterated Maps of the Interval*, in *Dynamical Systems (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1342)*, Springer, 1988, pp. 465–563.
- [4] Block, L., & Coven, E. (1987). *Topological conjugacy and entropy for piecewise monotone mappings*. Transactions of the AMS, 304(2), 663–679.
- [5] Buzzi, J. (2001). *Intrinsic ergodicity of piecewise monotone maps*. Israel Journal of Mathematics, 119, 29–52.
- [6] E. M. Coven and Z. H. Nitecki, *On the genesis of symbolic dynamics as we know it*, Colloquium Mathematicum, 110(2), 227–242, 2008.
- [7] S. Aranzubia, R. Carvajal and R. Labarca, *A computer verification for the value of the topological entropy for some special subshifts in the lexicographical scenario*, Proyecciones (Antofagasta), 37(3), 439–477, 2018.
- [8] R. Labarca and C. G. Moreira, *Bifurcation of the essential dynamics of Lorenz maps on the real line and the bifurcation scenario for Lorenz like flows: the contracting case*, 2010.
- [9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, New York, 1976.
- [10] M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2nd ed., Academic Press, 2004.

- [11] P. Aguirre, *PA*, Universidad Técnica Federico Santa María. Disponible en:
<http://paguirre.mat.utfsm.cl/dynamics.pdf>.